

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 23 • HEFT 5 • AUGUST 1935

## *Zur Dynamik nichtstationärer Gasentladungen. II* (*Hysteresiserscheinungen bei dynamischen Charakteristiken der Glimmentladung*)

Von *H. Gawehn und G. Valle*

(Mit 22 Figuren)

### Einleitung

Hysteresiserscheinungen, die in der Gasentladungsphysik im allgemeinen nur eine geringe Rolle spielen, gewinnen besondere Bedeutung bei der Untersuchung dynamischer Vorgänge. Zu wissen, inwieweit und unter welchen Bedingungen sie hier auftreten, ist wichtig nicht nur für die Theorie der Zustandsänderungen, sondern auch für die praktische Analyse dynamischer Charakteristiken (dyn. Char'en). Hier sei zunächst an die von Gawehn (1) in der ersten Arbeit dieser Folge angeschnittene Frage nach der Eindeutigkeit der Stromspannungs- ( $J$ - $V$ -)Ebene als Zustandsebene einer Gasentladungsstrecke erinnert. Die Annahme der Eindeutigkeit, wie sie auch Valle (2) in seinem Entwurfe eines Zustandsdiagramms eingeführt hat, ist eine bewußte Vernachlässigung aller Nachwirkungseffekte, eine Vereinfachung, welche eine qualitative Deutung vieler dynamischer Vorgänge gestattet, andererseits jedoch zu Ungenauigkeiten führt, deren Beseitigung vorerst eine Berücksichtigung der Hysteresiserscheinungen verlangt. Da unser Ziel darin besteht, eine Elektrodynamik der nichtstationären Gasentladungen zu schaffen, die es gestatten soll, dyn. Char'en zu deuten und quantitativ vorauszusagen, so mußten wir den Hysteresiserscheinungen zuerst unsere besondere Aufmerksamkeit widmen, weil diese, sich vielfach überlagernd, die theoretischen Zusammenhänge verdunkeln, indem sie die dyn. Char. mitunter bedeutend modifizieren.

Hysteresiserscheinungen sind die Folge von Nachwirkungen früherer Zustände. Sie können permanent sein, wie z. B. die von A. Rüttenauer (3) untersuchte Verschiebung der statischen Charakteristik (stat. Char.) von Edelgasröhren bei lang andauernder Belastung. Oder sie sind nur temporär, wie die hauptsächlich von R. Seeliger (4) ebenfalls in Edelgasen untersuchten Hysteresisschleifen, die man bei punktwiser Aufnahme der stat. Char. erhält.

Die beiden genannten Arbeiten sind u. W. die einzigen systematischen Untersuchungen, die sich mit der Erforschung der Ursachen dieser sehr komplizierten Effekte befassen. Nach Rüttenauer kann als sichergestellt gelten, daß die ganz langsam, über Hunderte von Brennstunden fortschreitende Veränderung der Entladungsstrecken, die nach unserer Beobachtung besonders stark bei Inbetriebnahme frisch hergestellter Röhren sich bemerkbar macht, auf Veränderungen des Gasinhaltes (Okklusion oder Freiwerden von Verunreinigungen durch die Elektroden oder Glaswände) beruht. Ebenso dürfte Seeliger den Beweis erbracht haben, daß die oft beobachtete sogenannte langsame negative Hysteresis zumindest in der Hauptsache auf einer Nachwirkung der sich träge ändernden Temperatur einzelner Teile der Entladungsstrecke (vor allem Kathode und Kathodenfallraum) und damit zusammenhängender lokaler Änderung der Gasdichte beruht. Eine Erklärung, wie sie übrigens auch schon von J. Herweg (5) vermutet wurde.

Da man es bei der experimentellen Erforschung dynamischer Zustände ebenso wie bei deren technischer Anwendung fast immer nur mit raschen periodischen Zustandsänderungen zu tun hat, interessieren vor allem die raschen Hysteresiserscheinungen. Über diese ist aber bisher noch so gut wie nichts bekannt. Man findet in der Literatur verstreut lediglich Vermutungen für ihre Existenz. Die noch nicht genügend experimentell bestätigte Stabilitätstheorie von W. Dällenbach (6) bietet neben den erwähnten Arbeiten hierfür ein Beispiel.

In diesem Zusammenhang sei auch eine Schlußfolgerung aus der älteren Literatur erwähnt, weil sie uns zugleich Gelegenheit gibt, den Begriff der Hysteresis für Gasentladungen abzugrenzen. J. Herweg (5) findet bei einer Nachprüfung der Kaufmannschen Stabilitätsungleichungen Werte von 20—80 Henry für das in diesen Formeln vorkommende  $L$ . Da aber der benutzte Entladungskreis praktisch frei von Selbstinduktion war, schließt Herweg auf eine „scheinbare Selbstinduktion“ oder Hysteresis der Entladungsstrecke, weil eine Hysteresis in einem Schwingungskreis ebenso wie eine Selbstinduktion wirkt. Abgesehen davon, daß auch bei W. Kaufmann (7) das  $L$  gar nicht eine wirkliche Selbstinduktion bedeutet, läßt sich gegen diese Schlußfolgerung formal nichts einwenden. Auch die von Valle (2) als Entstehungsursache dyn. Char'en in einem idealen eindeutigen Zustandsdiagramm eingeführte „elektrische Hysteresis“ ist im gleichen Sinne zu verstehen. Wir wollen aber doch die hier behandelte Eigenschaft aller Gasentladungen weiter nicht mehr als Hysteresis bezeichnen, ebenso wenig wie man die durch eine elektrische Selbstinduktion in einem Schwingungskreis

hervorgerufene Phasenverschiebung, die im  $J$ - $V$ -Diagramm ja auch eine Art dynamischer Charakteristik ergibt, als Hysteresiserscheinung zu bezeichnen pflegt.

Die Eigenschaft aller Gasentladungen, von der hier die Rede ist, ist ihre Trägheit gegenüber Zustandsänderungen. Vom ionentheoretischen Standpunkt aus ist diese Trägheit eine Selbstverständlichkeit. Ionenvermehrung und -verminderung erfordern Zeit. Trägheitserscheinungen rechnet man aber dann nicht zu den Hysteresiserscheinungen, wenn die Trägheit für jeden Momentanzustand eine angebbare Größe ist. (Wir denken an den Trägheitskoeffizienten, die „träge Masse“ der Mechanik.) Wir wollen deshalb nur dann von Hysteresiserscheinungen sprechen, wenn die Weiterentwicklung der Entladung (die dyn. Char.) nicht nur von dem durch eine beschränkte Anzahl von Zustandsgrößen charakterisierten Momentanzustand abhängt, sondern auch von den früher durchlaufenen Zuständen, also von der „Vorgeschichte“ der Entladung. Die Nachwirkung eines früher vorhanden gewesenen Zustandes drückt sich dann in einem neu erreichten Zustande, wenn dieser weiter besteht, durch irgendwelche Effekte aus, die mit einer gewissen Geschwindigkeit abklingen. Je nach der Größe dieser Abklinggeschwindigkeit können die durch die Nachwirkung hervorgerufenen Hysteresiserscheinungen als langsam, mitttelrasch oder rasch bezeichnet werden.

Als mögliche Ursachen für eine mitttelrasche oder rasche Hysteresis kann man nennen: Wechselwirkungen zwischen Gas einerseits und Elektroden und Gefäßwandungen andererseits, wie Ab- und Adsorptionsvorgänge, Gasbefreiung und chemische Reaktionen; ferner Polarisationen durch Ionenschichten (die unmittelbar als elektrische Doppelschichten oder auch mittelbar bei der Auslösung der Elektronen an der Kathode eine Rolle spielen können) und durch Wandladungen; schließlich bei sehr raschen Vorgängen eine Trägheit der Raumladungen. Auch die Trägheit von Temperaturänderungen, soweit sie sich auf kleinste Bereiche (etwa die Kathodenoberfläche) beschränkt, mag bei raschen Hysteresiserscheinungen als Ursache wirken, und man könnte vielleicht noch manchen anderen Erklärungsversuch heranziehen. All diese Möglichkeiten zu erörtern erscheint uns aber nicht angezeigt, weil, wie gesagt, kein experimentelles Material hierüber vorliegt, und zumal diese Möglichkeiten bereits durch Seeliger recht eingehend diskutiert worden sind. Nur über die Möglichkeit einer Raumladungshysteresis wird im letzten Abschnitt etwas gesagt werden.

Wichtiger erschien es, rasche Hysteresiserscheinungen überhaupt erst einmal einwandfrei nachzuweisen. Wir haben uns deshalb

darauf beschränkt, diese Erscheinungen zu suchen und Methoden für ihre Erforschung zu entwickeln. Damit im Zusammenhang soll untersucht werden, wie der bisher benutzte Begriff der Zustands-ebene erweitert oder abgeändert werden muß, um den Nachwirkungseffekten wenigstens annähernd Rechnung zu tragen.

Die mitgeteilten Versuche erstrecken sich nur auf das Gebiet der Glimmentladung in Edelgasen. Gelegentliche Beobachtungen in Luft und in  $N_2$  ergaben jedoch ganz ähnliche Resultate, und wir hoffen, daß die hier mitgeteilten grundsätzlichen Überlegungen und Versuchsergebnisse auch für ein weiteres Gebiet der Gasentladungen nicht bedeutungslos sein werden.

Die untersuchten Entladungsröhren waren dieselben wie in der ersten Arbeit dieser Folge (1), ferner technische Glimmlampen und vor allem eine Röhre, die wir im folgenden mit „O“ bezeichnen. Es ist dies eine kugelförmige Röhre von etwa 70 mm Durchmesser, mit Scheibenelektroden aus Eisen von etwa 11 mm Durchmesser im Abstand von etwa 9 mm, mit Neon („Neon I“) von

etwa 10 mm Druck gefüllt. Die eisernen Elektroden waren vor dem Einbau in reduzierender Atmosphäre ausgeglüht und mit Glimmer hinterlegt<sup>1)</sup>. Die Aufnahmen der Oszillogramme erfolgten mittels Kathodenstrahloszillograph und photographischer Kamera auf Platten. Die Methode war im Prinzip die übliche, früher als Methode II beschriebene. Im Entladungskreis lag also stets ein Widerstand.

Eine vollständige Schaltung ist in Fig. 1 wiedergegeben. Sie ist

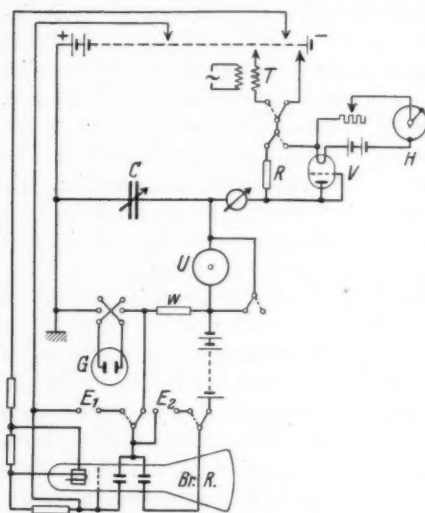


Fig. 1. Schaltschema

entsprechend den jeweiligen Bedürfnissen öfter modifiziert worden. Von einer Hochspannungsbatterie wird der Kondensator  $C$  über einen

1) Nach Angabe der Studienges. f. elektr. Beleuchtung, Berlin, die uns diese Röhre liebenswürdigerweise zur Verfügung stellte.



Widerstand  $R$  oder eine als Ventilröhre geschaltete Elektronenröhre  $V$  aufgeladen.  $T$  ist ein von einem kleinen Wechselstrom-generator gespeister Transformator, der an Stelle einer direkten Zuleitung in diesen Kreis geschaltet werden kann.  $C$  entladet sich über den Unterbrecher  $U$ , der auch kurz geschlossen werden kann, und über den Meßwiderstand  $w$  durch die Versuchsröhre  $G$ . Strom- und Spannungsmessung erfolgen in üblicher Weise mit der Braunschen Röhre (Br. R.), wie aus dem Schaltbild ersichtlich. Der Unterbrecher  $U$  ist eine durch Motor betriebene rotierende Hartgummiwalze mit verstellbaren Kontakten und festen Schleiffedern. Durch ihn kann der Entladungskreis periodisch ein- und ausgeschaltet werden mit Kontakt- oder Unterbrechungszeiten bis herab zu  $2 \cdot 10^{-2}$  sec. Im Heizkreis der Ventilröhre liegt bei  $H$  ein rotierender Widerstand, eine durch Motor betriebene rotierende Hartgummi-scheibe, die peripher mit einem Widerstandsdraht versehen ist und zum Kontakt in eine Quecksilberrinne taucht. Hiermit konnte ein periodisch zu- und abnehmender Heizstrom hergestellt werden. Bei  $E_1$  und  $E_2$  sind Anschlüsse für Spannungsquellen zur Eichung der Oszillogramme oder für ein Kippschwingungsgerät oder einen Spannungsteiler vorgesehen. Die meisten Umschalter sind nebeneinanderliegende Morsetasten, um vielfaches rasches Umschalten während der Aufnahmen zu ermöglichen. Der Zweck der ganzen Apparatur wird im weiteren Text erläutert werden.

#### Hysteresis und Zustandsebene

In Fig. 2 ist die punktweise aufgenommene stat. Char. der Röhre „O“ und eine Zustandskurve mit Hysteresisschleife gezeigt, die mit Hilfe des rotierenden Widerstandes ( $H$  in Fig. 1) im Heizkreis der Ventilröhre aufgenommen wurde. Die Frequenz war etwa  $1 \text{ sec}^{-1}$ .

Die Stromform kann infolge der Temperaturträgheit des Glühfadens der Ventilröhre angenähert als sinusförmig angesehen werden. Die Aufnahme zeigt die große Abweichung dieser Zustandskurve gegenüber der stat. Char., die bis zu 15 Volt beträgt trotz der kleinen Amplitude von nur 1,4 mA. Aus dem Umlauf-

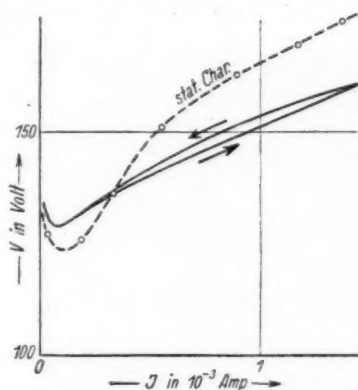


Fig. 2. „O“, Stat. Char. und Zustandskurve,  $\nu \approx 1 \text{ sec}^{-1}$

sinn der Hysteresisschleife ist ersichtlich, daß es sich um negative Hysteresis handelt, was auch aus der Neigung gegenüber der stat. Char. hervorgeht. Die Abweichung der Zustandskurve von der stat. Char. ist also sicherlich die Folge einer Temperaturnachwirkung.

Wird die Frequenz gesteigert, so wird die Neigung gegen die stat. Char. größer und die Hysteresisschleife schmaler. Umgekehrt wird bei kleinerer Frequenz die Schleife breiter, und ihre Mittellinie dreht sich mehr in die Richtung der stat. Char. Bei sehr kleiner Frequenz muß jedoch die Breite der Schleife wieder abnehmen; da schließlich bei sehr kleiner Gleitgeschwindigkeit des Zustandspunktes die Zustandskurve in die stat. Char. übergeht. Wir haben es hier mit der von Seeliger (4) hervorgehobenen Tatsache zu tun, daß eine Hysteresisschleife nur beobachtbar sein kann, solange die Gleitgeschwindigkeit des Entladungszustandes dieselbe Größenordnung hat wie die Abklinggeschwindigkeit der Hysteresis hervorbringenden Nachwirkung. Unterscheiden sich beide Geschwindigkeiten um Zehnerpotenzen, so ist keine Hysteresisschleife zu erwarten. Dagegen ist zu beachten, daß bei großer Zustandsgleitgeschwindigkeit die Hysteresis immer noch an der Neigung der Zustandskurve gegenüber der stat. Char. erkennbar bleibt.

Bei einer Frequenz des rotierenden Widerstandes von etwa  $7,5 \text{ sec}^{-1}$ , was einer mittleren Gleitgeschwindigkeit der Belastung von etwa  $3,4 \text{ Watt/sec}^{-1}$  entspricht<sup>1)</sup>, ist die Hysteresisschleife praktisch ganz verschwunden. Fig. 3 zeigt mehrere solche Zustandskurven, die sich durch die Größe der Belastungsamplitude unterscheiden. Man sieht, wie sich die Zustandskurven ungefähr parallel nach höheren Spannungswerten hin verschieben, wenn die Amplitude wächst. Da es sich hier um eine Temperaturnachwirkung handelt, wird man vermuten, daß die Verschiebung der Zustandskurven in Spannungsrichtung eine Folge der mit der Amplitude wachsenden mittleren Belastung der Entladungsstrecke ist. Dieses konnte mit Hilfe einer Aufnahmetechnik bestätigt werden, die ausführlich beschrieben werden soll, weil wir sie für bedeutsam für jede experimentelle Untersuchung dyn. Char'en halten.

*Aufnahmemethode für quasi-statische Charakteristiken:* Die zu untersuchende Entladungsstrecke wurde über den Widerstand  $R$

1) In unserer vorläufigen Mitteilung (Naturw. 22. S. 792. 1934; Ricerca scient. 5 (2). S. 281. 1934) haben wir die Belastungsgleitgeschwindigkeiten versehentlich der Zahl nach in  $\text{kW/sec}$ , statt in  $\text{Watt/sec}$ , wie dort bezeichnet ist, angegeben. Es muß an der entsprechenden Stelle heißen: „größenordnungsweise  $1 \text{ Watt/sec}$ “ statt „größenordnungsweise  $10^{-3} \text{ Watt/sec}$ “ und an späterer Stelle „etwa  $10 \text{ Watt/sec}$ “ statt „etwa  $10^{-2} \text{ Watt/sec}$ “.

(Fig. 1) längere Zeit stationär gebrannt und der Leuchtfleck auf dem Schirm der Braunschen Röhre markiert. Dann wurde für einen Augenblick durch Morsetaste an Stelle von  $R$  die Ventilröhre  $V$  mit dem dauernd laufenden rotierenden Widerstand  $H$  eingeschaltet, wodurch auf dem Leuchtschirm der Braunschen Röhre eine Zustandskurve der periodisch schwankenden Entladung abgebildet wird. Wichtig ist, daß diese Zustandskurve zunächst durch den markierten Punkt führt unabhängig davon, wie groß die Amplitude der Schwingung ist, um sich dann sofort parallel mit sich selbst zu verschieben. Es wurde deshalb gleich wieder auf den konstanten Widerstand  $R$  umgeschaltet und dieses Spiel mehrfach wiederholt. Dasselbe wurde für verschiedene stationäre Belastungen (über  $R$ ) als Bezugsbelastung durchgeführt.

Fig. 4 zeigt eine so erhaltene Schar von Zustandskurven mit den dazugehörigen Bezugsbelastungen für Röhre „O“. Damit die Aufnahme nicht bei den relativ lang dauernden stationären Belastungen durch den Leuchtfleck überstrahlt und verdrorben wird, würde die Kamera ungefähr synchron mit den Umschaltungen geöffnet und geschlossen. Die Zustandskurven waren bei dieser Aufnahme etwa 10 mal je 0,5 Sek. eingeschaltet, die dazwischen liegenden stationären Belastungen je etwa 10 Sek.



Fig. 3. „O“, Zustandskurven mit variierter Amplitude,  $\nu \approx 7,5 \text{ sec}^{-1}$



Fig. 4. „O“, quasi-stat. Char'en ( $\nu \approx 7,5 \text{ sec}^{-1}$ )

Es ist jetzt einleuchtend, daß die zu diesen Zustandskurven gehörenden Bezugsbelastungen nichts anderes sind als die Schnittpunkte dieser Kurven mit der stat. Char. Ihrer Bedeutung wegen wollen wir diese Kurven mit einem besonderen Namen belegen und als quasi-statische Charakteristiken (quasi-stat. Char'en) bezeichnen. Ihre Bedeutung erhellt aus folgender Überlegung: Spielt sich in einer Entladungsstrecke ein einigermaßen rascher dynamischer Vorgang ab, so haben die langsamen Nachwirkungseffekte keine Zeit, während des Vorganges abzuklingen. Die Entladungsstrecke verharret diesen Effekten gegenüber im alten Zustand. Ebenso verharret bei periodischen Vorgängen mit nicht zu kleiner Frequenz die Entladungsstrecke den Nachwirkungseffekten gegenüber in einem Zustand, welcher der mittleren Belastung entspricht. Es ist daher klar, daß es keinen Sinn hat, die dyn. Char. des Vorganges auf die wirklich-stat. Char. zu beziehen. Die auf eine bestimmte Belastung

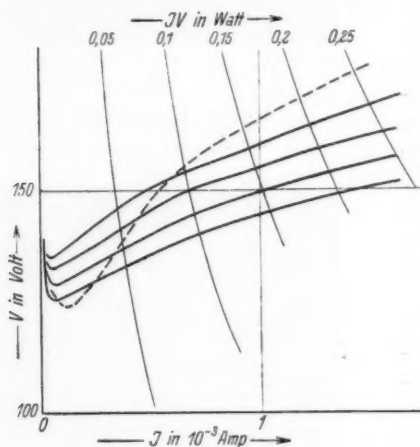


Fig. 5. „O“, quasi-stat. Char'en und stat. Char.

bezogene quasi-stat. Char. ist sicher viel besser als Bezugscharakteristik geeignet. Welche Bezugsbelastung im konkreten Fall zu wählen ist, wird sich meist unschwer entscheiden lassen. Außerdem läßt sich diese Unbestimmtheit auch vermeiden durch eine Versuchsmethode, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden soll.

In Fig. 5 ist eine Schar von quasi-stat. Char'en der Röhre „O“ zusammen mit der stat. Char. und den Kurven

gleicher Momentanbelastung nach mehreren Aufnahmen gezeichnet. Da die quasi-stat. Char'en annähernd parallel verlaufen, was außer für die Röhre „O“ auch für andere Röhren beobachtet wurde, so kann durch einige wenige quasi-stat. Char'en eine Entladungsstrecke charakterisiert und nach Bedarf leicht interpoliert werden. Für alle Untersuchungen dynamischer Vorgänge ist eine Entladungsstrecke durch solch ein Diagramm schon viel besser gekennzeichnet als, wie bisher üblich, durch die wirklich-stat. Char. allein.

Zum Beleg für die Nützlichkeit der Einführung der quasi-stat. Char'en seien erwähnt die früher (1) gezeigten Oszillogramme intermittierender Glimmentladungen. Damals wurde bereits vermutet, daß eine Beziehung der dyn. Char'en auf die wirklich-stat. Char. für das Verständnis des Vorganges ungeeignet wäre. Für die Aufnahmen der Bezugscharakteristiken wurde deshalb ein Verfahren benutzt, das als eine unvollkommene Vorstufe der erst hier konsequent durchgeführten Versuchsmethodik angesehen werden kann. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird diese Methode noch wiederholt angewandt werden. Erst durch sie wurde es möglich, rasche Hysteresiserscheinungen an dyn. Char'en erstmalig zu erkennen und einwandfrei nachzuweisen. Zunächst sei jedoch versucht, den zweckmäßigen und wiederholt benutzten Begriff der Zustandsebene einer Gasentladung an Hand der bisher gewonnenen Erkenntnisse zu vervollkommen.

*Zustandsebene und Zustandsraum.* Unter Vernachlässigung aller Hysteresiserscheinungen war für die  $J$ - $V$ -Ebene als eindeutige Zustandsebene einer Gasentladung die Beziehung

$$\frac{dJ}{dt} \geq 0 \text{ für } V - \bar{V} \geq 0$$

angenommen worden (1). Mit Rücksicht auf die zugrunde gelegte Eindeutigkeit war hierin die Kurve  $\frac{dJ}{dt} = 0$  die stat. Char. Die Anwendung auf dynamische Vorgänge der Glimmentladung ergab die Gültigkeit dieser Beziehung als erste Näherung. Nach dem Stand unserer bisherigen Kenntnisse haben wir jetzt die stat. Char. durch die Schar der quasi-stat. Char'en zu ersetzen. Dies ist so zu verstehen, daß zu jeder quasi-stat. Char. eine Zustandsebene gehört, für welche die obige Beziehung gilt, wobei  $\bar{V} = f(J)$  jetzt die jeweilige quasi-stat. Char. bedeutet.

Da nach unseren Versuchen die quasi-stat. Char'en ungefähr parallel verlaufen, können wir den Sachverhalt auch so darstellen. Bei einem dynamischen Vorgang gilt in einem bestimmten Augenblick eine Zustandsebene mit ihrer quasi-stat. Char. und ihrer  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung. Wenn im weiteren Verlauf des Vorganges die Nachwirkung der früheren Zustände abklingt, verschiebt sich die Zustandsebene mitsamt ihrer  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung etwa parallel mit sich selbst genau so wie ihre quasi-stat. Char. Diese theoretische Annahme würde zu einer zweiten Näherungslösung des Problems, Zustandsänderungen elektrodynamisch darzustellen, führen. Auf jeden Fall aber wird es richtig sein, das Abklingen der Temperatur-

nachwirkung (welche die langsame Hysterese hervorbringt) als einen Verzerrungsvorgang der im ersten Augenblick mit ihrer  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung geltenden Zustandsebene und der entsprechenden quasi-stat. Char. anzusehen.

Wegen ihrer Wichtigkeit für das Verständnis der folgenden Überlegungen und Versuche soll die vorstehende Darstellung der Nachwirkung

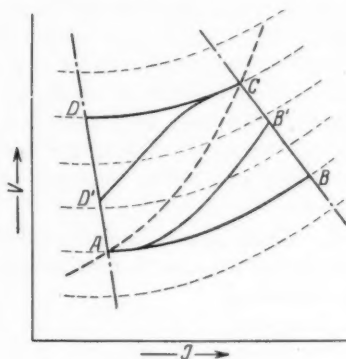


Fig. 6. Nachwirkung als Verzerrung der Zustandsebene

als Verzerrung der Zustandsebene an einem einfachen Beispiel erläutert werden, obgleich dieses nichts prinzipiell Neues bietet. Fig. 6 sei die Zustandsebene einer Entladungsstrecke. Die gestrichelte Kurve  $AC$  sei die wirklich-stat. Char., die fein gestrichelte parallele Kurvenschar sei die Schar der quasi-stat. Char'en. Die Entladung brenne stationär im Punkt  $A$  mit der durch die äußere Schaltung vorgegebenen Widerstandsgeraden  $DA$ . Jetzt werde die Schaltung rasch geändert, worauf die neue Widerstandsgerade  $CB$  gelte. Da-

bei durchläuft der Zustandspunkt eine Kurve, welche durch die der Schaltung entsprechende  $\frac{dV}{dt}$ -Verteilung und durch die  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung der Zustandsebene bestimmt wird. Da infolge der Nachwirkung zunächst die durch  $A$  gehende quasi-stat. Char. ( $\frac{dJ}{dt} = 0$ ) gilt, stabilisiert sich der Entladungszustand bei genügend rascher Zustandsänderung zunächst im „quasi-stationären“ Punkt  $B$ . Gleichzeitig beginnt die  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung der Zustandsebene sich in der Zeichnung nach oben zu verschieben. Dadurch gelangt der Zustandspunkt um ein virtuelles Stück in das Gebiet  $\frac{dJ}{dt} < 0$ , verläßt als Folge davon, wieder um ein virtuelles Stück, die Widerstandsgerade ( $\frac{dV}{dt} = 0$ ) und gelangt dadurch in das Teilgebiet  $\frac{dJ}{dt} < 0$ ,  $\frac{dV}{dt} > 0$ . Er bewegt sich somit nach links oben. Infolge des Zusammenwirkens beider Teilvorgänge, der Verzerrung der Zustandsebene und der rein elektrodynamischen Bewegung des Zustandspunktes, kommt es zustande, daß der Zustandspunkt hinter dem Schnitt-

punkt von Widerstandsgerade und quasi-stat. Char. herläuft. Praktisch kommt dadurch die Zustandskurve  $BC$  zustande<sup>1)</sup>.

Als nächster Versuch sei angenommen, daß die Schaltungsänderung und damit die Verschiebung der Widerstandsgeraden, so langsam erfolge, daß der Zustandspunkt auf dem Weg von  $A$  nach  $B$  in bekannter Weise an der quasi-stat. Char. entlanggleite. Ist dann die Gleitgeschwindigkeit immer noch groß gegen die Verzerrungsgeschwindigkeit der Zustandsebene, so durchläuft der Zustandspunkt einfach den Kurvenzug  $ABC$ . Ebenso würde bei einer Verschiebung der Widerstandsgeraden von  $BC$  nach  $AD$  die Zustandskurve  $CDA$  zustande kommen. Solche Kurvenformen sind ebenso wie die vorher beschriebenen in Wirklichkeit zu beobachten.

Erfolgt schließlich die Verschiebung der Widerstandsgeraden mit einer Geschwindigkeit von derselben Größenordnung wie die Verzerrungsgeschwindigkeit der Zustandsebene, so durchläuft der Zustandspunkt etwa eine Kurve  $ABC$  resp.  $CDA$ .

Für manche praktischen Zwecke kann es natürlich wichtig sein, die Geschwindigkeit, mit der sich die Zustandsebene verzerrt, zu kennen, um vollständige dyn. Char'en punktweise konstruieren zu können. Die Verzerrungsgeschwindigkeiten können durch Beobachtung einer Reihe von Zustandsänderungen von der Art der Übergänge  $BC$  und  $DA$  ermittelt werden. Wir wissen bereits aus den bisher vorliegenden Messungen, daß diese Verzerrungen bei der langsamen Hysteresis exponentiell mit Halbwertszeiten von Minuten erfolgen. Da jedoch für verschiedene Arten von Entladungsstrecken ganz verschiedene Geschwindigkeiten zu erwarten sind, haben wir von quantitativen Messungen der langsam abklingenden Nachwirkungen an unseren Versuchsröhren abgesehen, und uns sogleich den raschen Hysteresiserscheinungen zugewandt.

Man darf erwarten, daß die raschen Nachwirkungen in ihrer Erscheinungsform sich von den langsamen Nachwirkungen nur durch die größere Geschwindigkeit ihres Abklingens unterscheiden. Es liegt deshalb nahe, zu versuchen, alle Hysteresiserscheinungen durch mehr oder minder rasche Verzerrungen der Zustandsebene, und zwar wieder näherungsweise als Parallelverschiebungen, darzustellen. Genauer gesprochen, es soll angenommen werden, daß der meßbare dynamische Vorgang die Folge einer Superposition mehrerer Einzel-

1) Es ist auch denkbar, daß während dieses Vorganges eine Entladung instabil werden kann. Hierüber lassen sich quantitative Voraussagen machen auf Grund einer Theorie über das Verhalten des Zustandspunktes in der Umgebung des Gleichgewichtspunktes, die in der nächsten Arbeit dieser Reihe mitgeteilt werden soll.



vorgänge ist; nämlich erstens des ursprünglichen oder eigentlichen elektrodynamischen Vorganges, welcher durch eine  $\frac{dJ}{dt}$ -Verteilung einer eindeutigen Zustandsebene und durch eine von der Schaltung abhängige  $\frac{dV}{dt}$ -Verteilung bestimmt ist, und zweitens der Nachwirkungsvorgänge, die sich als verschiedene rasche Verzerrungen und näherungsweise als Parallelverschiebungen der eindeutigen Zustandsebene auffassen lassen. Ebenso wie die wirklich-stat. Char. infolge der langsamsten Hysteresisart sich in eine Schar quasi-stat. Char'en aufspalten ließ, muß sich dann jede quasi-stat. Char. infolge einer rascher abklingenden Nachwirkung wiederum in solche höherer Ordnung aufspalten lassen.

Selbstverständlich läßt sich dieser hypothetische Sachverhalt auch räumlich darstellen. Dies ist solange übersichtlich, als nur eine Nachwirkung in Betracht gezogen wird. So hat Seeliger (4) die langsame Hysteresis in einem  $J$ - $t$ - $p$ -Raum veranschaulicht, wobei der als dritte Koordinate benutzte Parameter  $p$  etwa unserer Bezugsbelastung entspricht. Unserer Darstellung der langsamen Hysteresis würde ein  $J$ - $V$ - $p$ -Raum entsprechen, in welchem die Ebenen  $p = \text{const}$  die Ebenen gleicher Bezugsbelastung sind. Die in diesen Ebenen verlaufenden quasi-stat. Char'en bilden zusammen eine Fläche, in der die wirklich-stat. Char. als Raumkurve verläuft. Will man jedoch statt einer mehrere Nachwirkungen berücksichtigen, so ist man gezwungen, einen  $n$ -dimensionalen Raum zu Hilfe zu nehmen. Damit verliert aber die räumliche Darstellung den Vorzug ihrer Anschaulichkeit.

Noch weniger zweckmäßig erscheint der Versuch einer allgemein gültigen analytischen Darstellung nach Art der bekannten Simonschen Theorie der Hysteresiserscheinungen beim Wechselstrom-Kohlelichtbogen. Denn es ist sehr zweifelhaft, ob die speziellen Annahmen, die im Falle dieser Theorie zum Erfolg geführt haben, sich auf alle Fälle von Nachwirkungen ausdehnen lassen. Für einen speziellen Fall ist dies von W. Dällenbach (6) versucht worden. Dällenbach hat den Simonschen Ansatz zu einer Erweiterung der Kaufmannschen Stabilitätstheorie benutzt und gefunden, daß gewisse Abweichungen zwischen den Voraussagen der Kaufmannschen Theorie und Versuchsergebnissen in einem speziellen Fall erklärbar werden. Die hierbei notwendigen Abschätzungen und die Einzelheit des Falles machen es jedoch unmöglich, endgültig zu entscheiden, ob die Anwendung des Simonschen Ansatzes hier wirklich berechtigt ist. Wir sind darum der Ansicht, daß in einem Gebiete, wie dasjenige der Gasentladungshysteresis, wo erst die

Grunderscheinungen gesondert ans Licht zu bringen sind und nach ihren allgemeinen Gesetzmäßigkeiten zu suchen ist, es zur Zeit zweckmäßiger ist, bei einer experimentellen Untersuchung die mehr qualitative Darstellung der Nachwirkungen als Verzerrungen der Zustandsebene zu benutzen.

### Hysteresis und dynamische Charakteristik

Wir haben angenommen, daß rasche Nachwirkungen grundsätzlich ebenso verlaufen und in Erscheinung treten wie langsame. Es wäre deshalb nur folgerichtig, für die Ermittlung und Untersuchung rascher Hysteresiserscheinungen im Prinzip die früher beschriebene Methode zur Aufnahme quasi-stat. Char'en anzuwenden, nur mit dem Unterschied, daß alle Vorgänge mit größeren Geschwindigkeiten ablaufen müßten. Wir zweifeln nicht an der Möglichkeit eines Erfolges eines solchen Verfahrens, vermuten aber, daß die experimentellen Schwierigkeiten erheblich werden, wenn die Abklinggeschwindigkeiten der Nachwirkungseffekte groß werden. Wir haben uns deshalb einfacherer Methoden bedient, von denen wir glauben, daß sie das Vorhandensein von mittlerraschen und raschen Nachwirkungseffekten ebenso sicher nachweisen.

Wir halten uns vor Augen, daß der zeitliche Verlauf eines Nachwirkungseffektes dann am wenigsten übersichtlich ist, wenn die Änderungsgeschwindigkeit des Entladungszustandes vergleichbar ist mit der Abklinggeschwindigkeit der Nachwirkung, weil in diesem Falle Formänderungen der dyn. Char. auftreten. Verläuft dagegen die Zustandsänderung viel rascher, als wie die Nachwirkung abklingt, so ist der reine Verlauf der Nachwirkung wieder leicht zu übersehen. Man braucht nur die dyn. Char. auf eine entsprechende quasi-stat. Char., eventuell höherer Ordnung, zu beziehen. Die einfachste Methode zur Auffindung und Untersuchung rascher Nachwirkungseffekte ist deshalb das Oszillographieren des Zündvorganges einer stationären Entladung. Bei nicht zu raschen Nachwirkungseffekten ist dann der eigentliche dynamische Vorgang schon abgeschlossen, bevor die Nachwirkung abklingt.

Für die Aufnahme von Zündkurven haben wir uns öfters einer Schaltung bedient, wie in Fig. 7 skizziert. Der rotierende Unterbrecher  $U$  liegt hier im Aufladekreis des Kondensators. Wenn  $U$  den Aufladekreis schließt, steigt die oszillographierte Elektrodenspannung  $V$  ebenso wie die am Kondensator liegende Spannung,

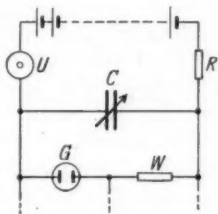


Fig. 7. Schaltschema

solange der Entladungskreis stromlos ist. Bei der Zündspannung  $Z$  beginnt der Zündungsvorgang, der beendet ist, wenn in der ganzen Schaltung ein stationärer Zustand erreicht ist. Sobald dann  $U$  den Aufladekreis unterbricht, findet der Löschvorgang statt, indem  $C$  sich über  $w$  und die Entladungsstrecke teilweise entladet, während gleichzeitig der Entladestrom bis auf 0 abnimmt.

Im Gegensatz zu dieser Schaltung befindet sich in Fig. 1 der Unterbrecher im Entladekreis. Dadurch wird erreicht, daß der Kondensator auf der Batteriespannung  $V_0$  liegt, wenn die Entladungsstrecke durch  $U$  angeschlossen wird. Wegen der Kleinheit der Elektrodenkapazität und sonstigen schädlichen Kapazitäten steigt in dieser Schaltung die Elektrodenspannung so rasch an, daß bei nicht zu großem  $V_0$  die Zündung infolge des Zündverzuges bei

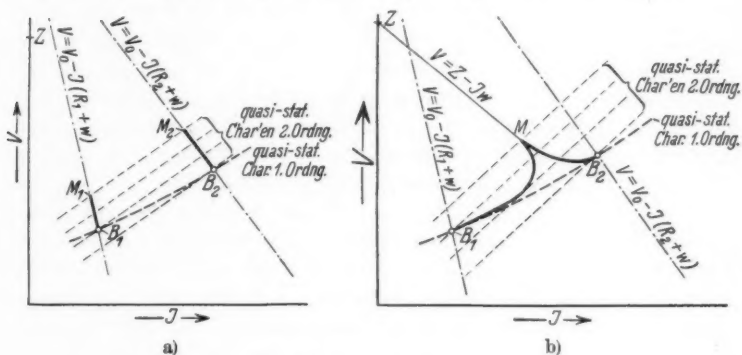


Fig. 8. Zündung mit mittelascher Hysteresis a)  $C \approx 0$ , b)  $C \gg 0$

$Z = V_0$  erfolgt, wodurch sich wesentlich höhere  $Z$ -Werte erzielen lassen unabhängig von  $C$  und  $R$ . Beide Schaltungen sind von uns vielfach benutzt worden.

In Fig. 8a und b sind Zündkurven dargestellt, wie sie bei Vorhandensein einer mittelaschen, positiven Hysteresis nach den früheren Darlegungen theoretisch zu erwarten sind, und zwar in a für den Fall einer verschwindend kleinen Kapazität ( $C \approx 0$ ), und in b für große Kapazität ( $C \gg 0$ ). Da wir den Richtungssinn der Hysteresis als positiv angenommen haben, ist zu erwarten, daß im ersten Augenblick nach der Zündung die Nachwirkung des unbelasteten Zustandes dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Zustandsebene zunächst in Richtung größerer Spannungswerte verschoben ist. Die im ersten Augenblick gültige Charakteristik — in Fig. 8 als quasi-stat. Char. 2. Ordng. bezeichnet — würde also

von einer oberen Spannungsgrenze aus während des Abklingens der Nachwirkung sich nach niederen Spannungen hin verschieben. Es ist deshalb eine erste vorläufige Stabilisierung im Schnittpunkt  $M$  der Widerstandsgeraden mit dieser Charakteristik zu erwarten. Für zwei verschiedene Vorschaltwiderstände  $R_1$  und  $R_2$  ergeben sich damit (für  $C$  klein, Fig. 8a) auch zwei verschiedene  $M$ -Punkte  $M_1$  und  $M_2$ . Verschiebt sich dann während des Abklingens der Nachwirkung die Charakteristik im Bild nach unten, so folgt der  $M$ -Punkt dieser Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit. Erfolgt dieses Abklingen nicht gar zu rasch im Verhältnis zu dem dynamischen Vorgang, so muß die Geschwindigkeit der Zustandsänderung im  $M$ -Punkt eine Unstetigkeit aufweisen, die sich im Oszillogramm durch eine unstetige Helligkeitszunahme bemerkbar machen muß. In  $B_1$  bzw.  $B_2$  sei der erste Abklingvorgang beendet. Liegen jetzt weitere Nachwirkungen außer der langsamen Temperaturnachwirkung nicht mehr vor, so hat der Zustandspunkt die quasi-stat. Char. 1. Ordng. erreicht, die bei jungfräulicher Zündung der Belastung Null, oder bei periodischer Wiederrzündung einer mittleren Belastung entspricht. Würde die Entladungsstrecke jetzt weiter stationär brennen bleiben, so würde der Zustandspunkt infolge der Temperaturhysterese in  $B$  von neuem unstetig, diesmal nach oben und viel langsamer, zu wandern anfangen, um schließlich erst auf der wirklich-stat. Char. endgültig zur Ruhe zu kommen.

Ist  $C$  groß (Fig. 8b), so wirkt die Kapazität zunächst wie eine konstante Spannungsquelle. Der Zustandspunkt folgt deshalb der Geraden  $V = Z - Jw$  bis zu deren Schnittpunkt mit der quasi-stat. Char. 2. Ordng., wo wieder die erste vorläufige Stabilisierung erfolgt. Die Lage des  $M$ -Punktes ist also diesmal unabhängig von  $R$  und von der Lage der Widerstandsgeraden. Weil jedoch die Entladungsstromstärke in diesem Punkt verschieden ist von der Gleichgewichtsstromstärke, die jeweils durch den Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der momentan gültigen Charakteristik ( $\frac{dJ}{dt} = 0$ ) bestimmt ist, verschiebt sich der Zustandspunkt in einer zweiten Phase in Richtung auf diesen Schnittpunkt, während die Spannung am Kondensator ihrem Gleichgewichtswert zustrebt. Wegen der Größe von  $C$  verläuft diese Phase verhältnismäßig langsam. Es ist deshalb zu erwarten, daß dieser Vorgang sich dem Abklingvorgang der Nachwirkung überlagert, wodurch, je nach der Größe von  $R$ , die Kurvenstücke  $MB_1$  (indirekte Zündung) oder  $MB_2$  [direkte Zündung (8)] zustande kommen. Wiederum liegt im  $M$ -Punkt eine Unstetigkeit der Geschwindigkeit vor. Die Kurvenstücke  $MB$  sind

gegenüber  $ZM$  um so heller im Oszillogramm, je langsamer sie durchlaufen werden. Der weitere Verlauf infolge Abklingens der langsamen Hysteresis wäre dann wieder der gleiche wie bei  $C \approx 0$ .

Die hier geschilderten Zündkurven haben wir in zahlreichen Oszillogrammen der Röhre „O“ gefunden. Ebenso deutlich auch in einer Versuchsröhre mit Al-Elektroden in Luft und  $N_2$ . In letzterer Anordnung kam es auch vor, daß der  $M$ -Punkt unterhalb des  $B$ -Punktes lag, was auf eine mittelrasche negative Hysteresis schließen ließ. In allen übrigen von uns untersuchten Edelgasröhren war jedoch ein Kurvenstück  $MB$  von der hier geschilderten Art nicht wahrnehmbar oder äußerst klein, woraus zu schließen wäre, daß bei diesen Röhren etwaige Nachwirkungserscheinungen entweder sehr rasch abklingen, oder auch so langsam, daß sie durch die stets vorhandene Temperaturnachwirkung verdeckt werden.

Wir zeigen in Fig. 9 ein Oszillogramm mit drei Zündkurven der Röhre „O“ bei großer Kapazität. Die Aufnahme wurde mit der Ventilröhre ( $V$  in Fig. 1) als Vorwiderstand gemacht. Der Unterbrecher lag im Aufladekreis (Fig. 7) und gab etwa 20 Kontakte/sec von je etwa  $2 \cdot 10^{-2}$  sec Dauer. In den drei quasi-stationären  $B$ -Punkten betrugen die Stromstärken (Sättigungsstrom der Ventilröhre) etwa

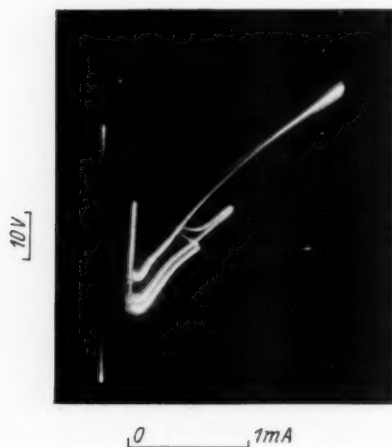


Fig. 9. „O“, Zündkurven,  $C \gg 0$

0,5, 0,75 und 1,6 mA. Die zugehörigen Kapazitäten waren etwa 250-, 200- und  $155 \cdot 10^{-9}$  F. Der Meßwiderstand  $w$  betrug 20000  $\Omega$ . Das Achsenkreuz in Fig. 9 diente der Eichung.

In dieser Aufnahme sind deutlich die  $M$ -Punkte erkennbar. Die von den drei  $B$ -Punkten aus nach links unten parallel verlaufenden hellen Linien sind die zugehörigen Löschvorgänge, die hier nur insofern interessieren, als sie ungefähr den Verlauf der zugehörigen quasi-stat. Char'en 1. Ordng. wiedergeben, weil der Zustandspunkt während des Verlöschens dicht unter der Charakteristik entlangläuft, wenn  $C$  groß ist (1). Die Parallelverschiebung dieser Kurven ist die Folge der Temperaturhysteresis, da den verschiedenen periodischen Vorgängen verschiedene mittlere Belastungen zukommen.

Infolge der langsamen Hysteresis verschiebt sich mit der quasi-stat. Char. 1. Ordng. die gesamte Zustandsebene, wodurch der Zündpunkt  $Z$  mit wachsender Belastung ebenfalls in der Abbildung nach oben rückt, wenn  $C$  konstant gehalten wird. Um die Aufnahme übersichtlicher zu gestalten, und vor allem um zu zeigen, daß bei großem  $C$  und konstantem  $Z$  die  $M$ -Punkte immer auf derselben Geraden  $V = Z - Jw$  liegen, wurde jedoch außer der Belastung auch die Kapazität variiert, und zwar stets so, daß  $Z$  konstant blieb. In der Aufnahme ist dies nicht vollständig geglückt,  $M$  liegt für die größte Belastung etwas zu hoch. Immerhin erkennt man sehr gut die Gesetzmäßigkeiten.  $M$  hat immer den gleichen Abstand von der Löschkurve und damit auch von der quasi-stat. Char. 1. Ordng. Man erkennt auch deutlich die Unstetigkeit in den  $M$ -Punkten (die Geraden  $ZM$  sind auf der Kopie kaum sichtbar), wie überhaupt die Bestätigung der theoretischen Annahmen. Ähnliche Oszillogramme wurden in größerer Zahl angefertigt. Wir glauben, daß die eigenartigen Kurvenformen mit der Unstetigkeitsstelle im  $M$ -Punkt ohne Berücksichtigung zweier Nachwirkungseffekte, eines langsamen und eines rascheren, wohl nicht zu verstehen sind.

*Aufnahmeverfahren für dynamische Charakteristiken.* Zum Verständnis des folgenden Oszillogramms muß zunächst das Verfahren kurz beschrieben werden, das wir zur Aufnahme dynamischer Vorgänge erfolgreich angewendet haben. Es ist dies im Grunde das gleiche Verfahren, das bereits für die Aufnahme der quasi-stat. Char'en beschrieben wurde, nur mit dem Unterschied, daß jetzt auch die dynamischen Vorgänge bei der gleichen mittleren Belastung wie eine quasi-stat. Char. oszillographiert wurden. Der mit Hilfe des Unterbrechers  $U$  (Fig. 1) periodisch wiederholte Zündvorgang wurde etwa 0,2 Sek. lang oszillographiert. Dann wurde  $U$  kurzgeschlossen und gleichzeitig der Aufladekreis des Kondensators über  $R$  an eine bestimmte feste Batteriespannung  $V_0$  gelegt. Nachdem die Versuchsröhre auf diese Weise längere Zeit stationär, nämlich mit der Bezugsbelastung, gebrannt hatte, wurde wieder ungefähr 0,2 Sek. lang auf den Unterbrecher und gleichzeitig auf die jeweilige Batteriespannung  $V_0$  umgeschaltet usw. Ungefähr synchron mit den Umschaltungen wurde der Verschluß der photographischen Kamera geöffnet und geschlossen, um eine Überstrahlung der Aufnahme durch den stillstehenden Leuchtfleck während der stationären Bezugsbelastung zu vermeiden. So wurde bei dem Oszillogramm Fig. 10 für jede Zündkurve das geschilderte Spiel 30 mal wiederholt. Anschließend wurde dann die zu derselben Bezugsbelastung gehörige quasi-stat. Char. mit der ähnlichen, bereits früher beschrie-

benen Technik auf die gleiche Platte aufgenommen. Durch dieses Verfahren wird praktisch die früher behandelte langsame Temperaturhysteresis ausgeschaltet, weil alle oszillographierten Vorgänge der gleichen Temperaturnachwirkung unterworfen sind. So können die raschen Hysteresiserscheinungen gesondert und rein zur Beobachtung gelangen.

Fig. 10 ist ein Oszillogramm von 6 Zündkurven bei sehr kleiner Kapazität ( $C \approx 0$ ), das nach dem vorstehend beschriebenen Verfahren erhalten wurde. Die Entladung erfolgte jedesmal über denselben Vorschaltwiderstand  $R = 200\,000\ \Omega$  und denselben Meßwiderstand  $w = 50\,000\ \Omega$ . Variiert wurde die Batteriespannung  $V_0$  in Stufen

von 20 V. Die Bezugsbelastung erfolgte mit  $2 \cdot 10^{-4}\text{ A}$ , bei einer Batteriespannung  $V_0 = 192\text{ V}$ . Die quasi-stationären Endzustände sind an den sechs hellen Flecken im Bild erkennbar. Sie liegen infolge der Aufnahmetechnik alle auf der gleichen, ebenfalls erkennbaren quasi-stat. Char. Der dritte Fleck von links ist zugleich der Zustandspunkt der Bezugsbelastung. Die eigentlichen Zündkurven vom Zündpunkt  $Z$  bis zur ersten vorläufigen Stabilisierung in den  $M$ -Punkten sind nicht sichtbar. Die Verwaschenheit der  $M$ -Punkte selbst ist eine Folge der komplizierten Aufnahmetechnik. Auf dem

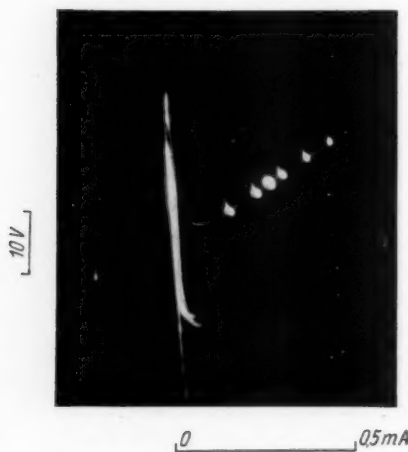


Fig. 10. „0“, Zündkurven,  $C \approx 0$

Leuchtschirm der Braunschen Röhre waren die  $M$ -Punkte jedesmal als deutliche Unstetigkeitsstellen erkennbar.

Das Oszillogramm Fig. 10 verifiziert die theoretischen Überlegungen der Fig. 8a. Die Schar der  $M$ -Punkte bezeichnet die obere Grenze der quasi-stat. Char'en 2. Ordng., in welche die oszillographierte quasi-stat. Char. 1. Ordng. aufgelöst zu denken ist. Nur ein Unterschied zwischen Fig. 8a und Fig. 10 fällt auf. Während nämlich in Fig. 8a die Strecken  $MB$  sich nach links verkürzen, tun sie es im Oszillogramm nach rechts. Die Ursache dieses Unterschiedes liegt darin, daß die Zustandsebene während des Abklingens der mitteleraschen Nachwirkung sich nicht nur nach unten verschiebt, wie zunächst der Einfachheit halber angenommen wurde, sondern



sich gleichzeitig dreht. Die Schar der quasi-stat. Char'en 2. Ordng. dürfte für die Röhre „O“ in Wahrheit etwa so verlaufen, wie in Fig. 11 skizziert.

Da wir angenommen haben, daß die mittlrasch abklingende Nachwirkung wesentlich ebenso verlaufen und deshalb zu ähnlichen Hysteresiserscheinungen führen soll wie die langsam abklingende Temperaturnachwirkung, ist Fig. 11 so zu verstehen, daß die oberste quasi-stat. Char. 2. Ordng. die Nachwirkung der Belastung Null darstellt, die zu unterst gezeichnete zur Belastung  $B_2$  gehört usf. Ist die gegenseitige Lage der Bezugscharakteristiken 1. und 2. Ordng. richtig gezeichnet, so ist bei rascher Änderung der Belastung (Zündung mit Vorbelastung) ein Verlauf der Zustandskurven ähnlich wie in dem analogen Fall der Fig. 6 zu erwarten. Nur muß jetzt die erste vorläufige Stabilisierung  $M_2$  oberhalb vom quasi-stationären Endzustand  $B_2$  liegen, wenn der Vorzustand  $B_1$  die kleinere Belastung hatte, und  $M_1$  unterhalb von  $B_1$ , wenn der Vorzustand  $B_2$  die größere Belastung hatte, weil es sich jetzt um eine positive Hysteresis handelt. Diese Schlußfolgerung ist durch das Oszillogramm Fig. 12 verifiziert. Für diese Aufnahme wurde die Schaltung der Fig. 1 mit  $R$  als Vorschaltwiderstand und  $C = 0$  und einem zweiten Vorschaltwiderstand  $R'$ , der parallel zum rotierenden Unterbrecher  $U$  lag, benutzt. Bei offenem Unterbrecher wurde dadurch die Röhre über den Gesamtwiderstand  $R + R'$  und bei geschlossenem Unterbrecher allein über den Widerstand  $R$  gebrannt. Die Umschaltung durch  $U$  hin und zurück erfolgte etwa 10 mal/sec. Angesichts dieser Frequenz liegen natürlich beide Endzustände auf der gleichen quasi-stat. Char. 1. Ordng., wie in Fig. 11 angenommen.

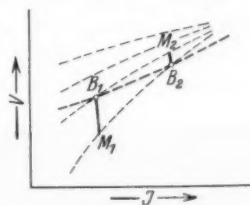


Fig. 11. Zündung mit Vorbelastung

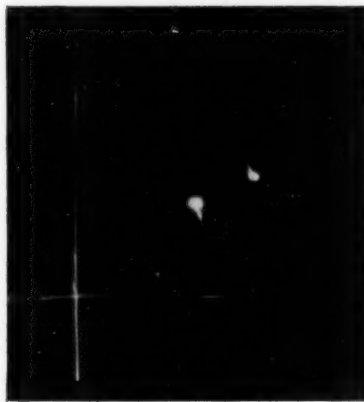


Fig. 12. „O“, Zündung mit Vorbelastung,  $C \approx 0$

Durch Parallelschalten einer Kapazität von 4000 cm zu dem Widerstand  $R'$  konnte bei einer anderen Aufnahme (Fig. 13) der Übergang  $B_2M_1$  etwas verlangsamt werden, um die quasi-stat. Char. 2. Ordng. ungefähr sichtbar zu machen.

Es ist also nicht erforderlich, daß bei einer positiven Hysterese  $M$  immer oberhalb von  $B$  liegt. Dieses ist nur dann der Fall, wenn der Endzustand sich aus Zuständen kleinerer Belastung entwickelt. Kommt der Entladungszustand aus einem Gebiet höherer Belastung, so liegt  $M$  unterhalb von  $B$ . Dieses kann deshalb auch



Fig. 13. „O“, Zündung  
mit Vorbelastung,  $C = 4000$  cm

bei der sogenannten indirekten Zündung (8) eintreten, bei welcher während der Zündung ein Strommaximum durchlaufen wird. Auch dieses konnten wir beobachten.

Nach diesen Erfahrungen war es möglich, in Fig. 14 eine vollständige quasi-stat. Char. 2. Ordng. punktwise aufzunehmen. Die Versuchsanordnung unterschied sich von der vorigen nur dadurch, daß jetzt zwei rotierende Kontakte am Motor-Unterbrecher die Versuchsröhre der Reihe nach auf eine mittlere, eine kleinere, dieselbe mittlere und

zuletzt eine größere Belastung in jeder Periode schalteten. Dadurch wurde erreicht, daß bei immer gleichbleibender mittlerer Belastung der Entladungszustand abwechselnd einmal nach links und einmal nach rechts in der Abbildung sprang. Die neun hellen Punkte bestimmen die zur mittleren Belastung gehörende quasi-stat. Char. 1. Ordng. Die Anfangspunkte der Hysteresisgeraden — mit Ausnahme der mittleren — welche rechts oberhalb und links unterhalb dieser Kurve liegen, bestimmen die zur mittleren Belastung gehörende quasi-stat. Char. 2. Ordng. Die längeren, beim mittleren Belastungspunkte auftretenden Hysteresisgeraden sind dagegen nicht mitzurechnen, weil sie von den verschiedenen Rückkehrvorgängen herrühren.

Bei dieser Aufnahme fällt auf, daß die Hysterese um so größer wird, je mehr man in das subnormale Gebiet (fallender Teil der quasi-stat. Char.) eindringt. Die verschiedene Neigung der Hyste-

resisgeraden entspricht natürlich der verschiedenen Neigung der Widerstandsgeraden, auf denen sie liegen.

Zur Bestimmung der *Abklinggeschwindigkeit* der Nachwirkung sind Zündvorgänge von der Art der in Fig. 10 oszillographierten ohne weiteres geeignet. Die Zeit, die für die Zustandsänderung  $MB$  verbraucht wird, ist zugleich die Abklingzeit der zu  $M$  gehörigen Nachwirkung. Zündkurven von der Art der in Fig. 9 oszillographierten, also mit großer Kapazität, sind dagegen für den vorliegenden Zweck ungeeignet, weil die für den Ausgleichsvorgang



Fig. 14. „O“, quasi-stat. Char.  
1. und 2. Ordng.



Fig. 15. „O“, Hysteresisschleifen,  
 $\nu \approx 40 \text{ sec}^{-1}$

in der Schaltung verbrauchte Zeit größer sein kann, als die Abklingzeit der Nachwirkung.

Für die Zeitmessungen haben wir uns der bekannten Methode bedient, das eine Plattenpaar der Braunschen Röhre durch Kipp-schwingungen periodisch abzulenken, während der Spannungsabfall  $MB$  mit dem anderen Plattenpaar aufgenommen wurde. Eine Schwierigkeit wurde dadurch hervorgerufen, daß der interessierende Vorgang  $MB$  zeitlich nur einen sehr kleinen Bruchteil der ganzen Periode von einer Zündung bis zur nächsten ausmachte. Es war deshalb erforderlich, die Frequenz der Kipp-schwingung groß gegen die Frequenz des Unterbrechers zu wählen. Aus diesem Grunde aber, und wegen der nicht genügenden Konstanz der Frequenz des Motor-Unterbrechers waren stehende Kurven auf dem Leuchtschirm der Braunschen Röhre nicht mit der Konstanz zu erhalten, die für eine photographische Fixierung erforderlich gewesen wäre. Trotz-

dem war eine genügend genaue Zeitbestimmung möglich. Es ergab sich, daß der Abklingvorgang  $MB$  bei der Röhre „O“ ungefähr  $3 \cdot 10^{-3}$  sec dauert und mit anscheinend exponentiell abnehmender Geschwindigkeit abläuft. Da die Zustandsebene während dieses Vorganges sich um ungefähr 10 Volt verschiebt, entspricht dies einer mittleren Abklinggeschwindigkeit von etwa 3000 Volt/sec. Es konnte auch beobachtet werden, daß diese Zeit unabhängig von der Größe der Kapazität ( $C$  in Fig. 1) ist, solange diese klein ist, wie es die Theorie verlangt.

Die Zeit von  $3 \cdot 10^{-3}$  sec liegt knapp unter der Größenordnung der Halbperiode eines technischen Wechselstroms. Es war deshalb zu vermuten, daß eine Hysteresisschleife auftritt, wenn dem Entladungsstrom der Röhre „O“ durch einen technischen Wechselstrom eine Schwingung aufgeprägt wird. Wir haben dieses bei sämtlichen auch sonst in dieser Arbeit von uns benutzten Röhren mit Edelgasfüllung untersucht, jedoch nur bei Röhre „O“ stark auseinandergezogene Hysteresisschleifen gefunden. Bei allen übrigen Röhren waren die Schleifen, falls überhaupt wahrnehmbar, sehr schmal. Dieses steht in guter Übereinstimmung mit dem Befund, daß von allen untersuchten Edelgasröhren ebenfalls nur bei der Röhre „O“ die Zündkurven durch das Auftreten von  $M$ -Punkten eine große mittelrasche Hysteresis erkennen ließen.

Für die Aufnahme der drei Hysteresisschleifen der Röhre „O“ in Fig. 15 wurde ein kleiner 40periodiger Wechselstromgenerator durch den Transformator  $T$  in Fig. 1 mit dem Entladungskreis gekoppelt. Die Versuchsdaten waren  $C = 0$ ,  $R = 230000 \Omega$ ,  $w = 100000 \Omega$ . Die drei Kurven unterscheiden sich dadurch, daß  $V_0$  um je 4 Volt geändert und damit die  $V_0$ -Widerstandsgerade parallel mit sich selbst verschoben wurde. Die Stromamplitude der aufgeprägten Schwingung betrug etwa 0,2 mA. Die unterste Kurve liegt ganz im anomalen Gebiet der Glimmentladung. Die mittlere Kurve greift links ins subnormale Gebiet (fallende stat. Char.) über. Bei der obersten Kurve erlischt die Entladung bereits zeitweilig, so daß sie in der Spitze links oben bei jeder neuen Periode auch neu zünden muß. Diese Kurve veranschaulicht damit den Übergang zur Zündkurve mit mittelrascher Hysteresis. Man erkennt die Ähnlichkeit mit den Zündkurven der Fig. 9.

Die Aufnahmenreihe Fig. 15 ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Einmal, weil sie beweist, daß es sich bei den Oszillogrammen Fig. 9 und 10 tatsächlich um eine Hysteresiserscheinung handelt. Sodann beweist das Auftreten der Hysteresisschleifen die Richtigkeit der gemessenen Abklingzeit. Und schließlich bestätigt

Fig. 15, so wie schon früher Fig. 14, daß die quasi-stat. Char'en 2. Ordng. in der Richtung wachsender Stromstärken konvergieren, wie in Fig. 11 gezeichnet. Denn nur so ist die Tatsache verständlich, daß die Hysteresisschleifen in den Oszillogrammen links breit sind und nach rechts spitz auslaufen. Diese eigentümliche Form haben wir auch bei anderen Röhren gefunden. Nur waren die Schleifen dort, wie gesagt, viel schmäler. Bei höheren Stromstärken (einigen Milliampere) verschwindet bei sämtlichen Röhren die mittelrasche Hysteresis praktisch ganz. Ihre große Wirkung im Gebiet des Spannungsminimums der Charakteristik zeigt sich übrigens auch schon in Fig. 3, wo die quasi-stat. Char'en 1. Ordng. trotz der sehr viel kleineren Schwingungsfrequenz links bereits kleine Schleifen zeigen. Ihr positiver Umlaufssinn wurde mit Hilfe des rotierenden Spiegels bestätigt.

Weniger übersichtlich ist der Einfluß einer rasch oder mittelrasch abklingenden Nachwirkung auf die Form der Zustandskurven der intermittierenden Entladung. Wir fanden für die Röhre „O“, daß nur bei großer Kapazität die Zustandskurven so verlaufen, wie es nach der einfachen Theorie dieser Erscheinung (1) zu erwarten ist. Der Zustandspunkt folgt dann nämlich zunächst der Geraden  $V = Z \cdot Jw$ , durchläuft ein Strommaximum  $J_{\max}$ , das ungefähr auf der zugehörigen quasi-stat. Char. 1. Ordng. ( $\frac{dJ}{dt} = 0$ ) liegt, und verläuft dann während des Löschvorganges unterhalb dieser Charakteristik, sich ihr um so enger anschmiegend, je größer  $C$  ist. Von  $J_{\max}$  ab verlangsamt sich dabei die Änderungsgeschwindigkeit des Zustands, so daß in allen Oszillogrammen die Zustandskurven von  $J_{\max}$  ab heller erscheinen. Bei kleineren Kapazitäten nahmen die Kurven jedoch Formen an, wie sie das Oszillogramm Fig. 16 zeigt.

Diese Aufnahme wurde in der üblichen Blinkschaltung mit der Ventilröhre als Vorwiderstand gemacht, und zwar war der Sättigungsstrom  $1,2 \cdot 10^{-5}$  Amp., also klein gegen die im Oszillogramm vorkommenden Stromstärken. Ferner war  $w = 50000 \Omega$  und  $C = 3,8, 13,8$  und  $33,8 \cdot 10^{-9}$  Farad, wobei die Kapazität im Bild von links nach rechts wächst. Für die rechte Kurve liegt  $J_{\max}$  etwas oberhalb der quasi-stat. Char. Gleichzeitig ist deutlich ein  $M$ -Punkt (Unstetigkeitsstelle) zu erkennen. Bei der mittleren Kurve bleibt  $J$  im Maximum eine Zeitlang konstant, und in der Kurve links artet  $J_{\max}$  in einen Knick im  $M$ -Punkt aus. Wesentlich ist hierbei, daß unterhalb von  $M$  die drei Kurven sich durch ihre Neigung unterscheiden. Die mittlere Kurve verläuft von  $M$  ab zunächst in Richtung der Spannungs-

achse, bei der linken Kurve nimmt dagegen der Strom zunächst ab und bei der rechten zunächst zu.

Die theoretische Deutung dieser Kurvenformen gelingt unschwer, wenn man bedenkt, daß auffallende Änderungen in der Form der Zustandskurven immer dann zu erwarten sind, wenn die Abklinggeschwindigkeit der Nachwirkung mit der Geschwindigkeit der Zustandsänderung vergleichbar wird. Überlegt man sich, was zu erwarten ist, wenn die Zustandsebene sich während der Zündung nach kleineren Spannungen hin verschiebt, so erhält man folgendes theoretisches Bild: Die Zündung erfolgt zunächst so rasch, daß der Zustandspunkt längs der Geraden  $V = Z - Jw$  fortschreitend die zu

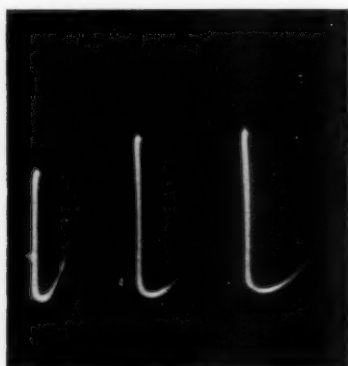


Fig. 16. „O“,  
Intermittierende Entladung



Fig. 17. „O“,  $V-t$ -Oszillogramm  
einer intermittierenden Entladung

oberst liegende quasi-stat. Char. 2. Ordng. erreicht, wo man, da hier  $\frac{dJ}{dt} = 0$  ist, zunächst ein Strommaximum zu erwarten hat. Wenn nun in diesem Augenblick die mittelrasche Nachwirkung abzuklingen beginnt und eine Verzerrung der Zustandsebene bewirkt, so sind drei Fälle unterscheidbar:

1. Die Geschwindigkeit der Zustandsänderung in diesem Punkt ist größer als die Verzerrungsgeschwindigkeit der Zustandsebene. Dann überholt der Zustandspunkt die quasi-stat. Char. 2. Ordng. und gelangt damit sofort in das Gebiet  $\frac{dJ}{dt} < 0$ . Unter diesen Umständen muß die Stromstärke vom  $M$ -Punkt ab abnehmen (Fig. 16, linke Kurve).

2. Die Geschwindigkeit der Zustandsänderung ist gleich der Verzerrungsgeschwindigkeit der Zustandsebene. Dann bleibt, solange dies zutrifft, der Zustandspunkt auf der Kurve  $\frac{dJ}{dt} = 0$ . Die Stromstärke bleibt unterhalb von  $M$  zunächst konstant (Fig. 16, mittlere Kurve).

3. Die Geschwindigkeit der Zustandsänderung ist kleiner als die Verzerrungsgeschwindigkeit der Zustandsebene. Dann erreicht der Zustandspunkt die Kurve  $\frac{dJ}{dt} = 0$ , streng genommen, überhaupt nicht, sondern läuft zunächst hinter ihr her. Er bleibt damit im Gebiet  $\frac{dJ}{dt} > 0$ , die Stromstärke nimmt zunächst noch weiter zu. Erst, wenn die raschere Nachwirkung abgeklungen ist, kommt es auf der quasi-stat. Char. 1. Ordng. zu einem Strommaximum. Die Kurve rechts in Fig. 16 stellt danach einen Übergang zwischen den Fällen 2 und 3 dar.

Ist diese theoretische Deutung der beobachteten Kurvenformen richtig, so bietet sich hier eine besonders einfache Methode zur Auffindung und quantitativen Bestimmung mittlerascher bis rascher Nachwirkungseffekte. Durch Veränderung der Kapazität hat man es in der Hand, den Übergang der verschiedenen Kurvenformen ineinander stetig zu beobachten. Man braucht dann nur denjenigen Wert der Kapazität festzustellen, für den die Form der mittleren Kurve der Fig. 14 auftritt. Für das Kurvenstück unterhalb  $M$ , für welches  $J$  konstant ist — und wegen des Spannungsabfalls an  $w$  nur für dieses Kurvenstück — ist dann die Spannungsgleitgeschwindigkeit einfach durch  $J/C$  gegeben, solange der Aufladestrom (über  $R$  oder  $V$ ) vernachlässigbar klein gehalten wird. Die Spannungsgleitgeschwindigkeit  $J/C$  ist dann aber auch zugleich die Anfangsgeschwindigkeit des Abklingens des Nachwirkungseffektes. Durch die Lage der  $M$ -Punkte bei variiert Kapazität ist schließlich auch noch ein Stück der oberen Grenze der quasi-stat. Char'en 2. Ordng. bestimmt.

Die Bestimmung des *Anfangswertes* der Abklinggeschwindigkeit der mittleraschen Hysteresis für Röhre „O“ ergab auf diese Weise etwa  $10^4$  Volt/sec. Da früher aus den  $V$ - $t$ -Oszillogrammen von Zündkurven der Wert der *mittleren* Abklinggeschwindigkeit zu 3000 Volt/sec ermittelt worden war, kann von einer guten Übereinstimmung der Meßergebnisse nach zwei so verschiedenen Methoden gesprochen werden. Zugleich erscheint damit die gegebene theoretische Deutung der Fig. 16 gerechtfertigt.



Zur Kontrolle der Meßergebnisse wurden auch noch  $V$ - $t$ -Oszillogramme für die drei Zustandskurven der Fig. 16 aufgenommen. Wir sind in der Lage, in Fig. 17 eine gut gelungene Photographie eines  $V$ - $t$ -Oszillogramms, das für die linke Kurve der Fig. 16 gilt, zu zeigen. Der Sinn dieses Oszillogramms ist leicht verständlich. Die waagerechten Striche oben und unten sind Eichmarken. Die Zeit läuft im Bild von links nach rechts, während die Elektrodenspannung senkrecht dazu zu denken ist. Das helle Kurvenstück in der Ecke links oben ist das Ende der Aufladepiode. Im höchsten Punkt erfolgt die Zündung, worauf die Spannung sehr rasch zunächst bis zum  $M$ -Punkt abfällt. Von hier ab verringert sich die Spannung wesentlich langsamer, was an der größeren Helligkeit dieses Kurvenstückes erkennbar ist, bis zum Spannungsminimum. Das Stück unterhalb von  $M$  entspricht dem interessierenden Kurventeil in Fig. 16.

Die Auswertung des Oszillogramms Fig. 17 ergibt eine Spannungsgleitgeschwindigkeit im  $M$ -Punkt von ungefähr  $13000 \text{ Volt/sec}$ . Dieser Wert beschreibt also den Spannungsabfall im  $M$ -Punkt der Fig. 16, linke Kurve, welcher Wert der Theorie nach größer ist als der Anfangswert der Abklinggeschwindigkeit. Aus einem ähnlichen  $V$ - $t$ -Oszillogramm der mittleren Kurve ergibt sich für die entsprechende Gleitgeschwindigkeit und jetzt zugleich für die Anfangsgeschwindigkeit des Abklingvorgangs wieder etwa  $10000 \text{ Volt/sec}$ , also derselbe Wert, der früher unmittelbar errechnet wurde. Für die rechte Kurve in Fig. 16 wurde schließlich der Wert etwa  $6000 \text{ Volt/sec}$  gemessen, der nach der Theorie kleiner ist als die Anfangsgeschwindigkeit des Abklingens.

Wenigstens annähernd konnte auch die Geschwindigkeit der Zustandsänderung längs der Zündgeraden  $ZM$  bestimmt werden, und zwar zu etwa  $10^5 \text{ Volt/sec}$ . Der ganze Vorgang vom  $M$ -Punkt bis zum Spannungsminimum, der natürlich länger dauert als der Abklingvorgang, dauert etwa  $4 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$ , was ebenfalls den früher gemessenen Wert von  $3 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$  für den Abklingvorgang bestätigt.

Zusammenfassend kann behauptet werden, daß durch sämtliche Untersuchungsverfahren eine mittelrasche Hysteresis bei der Röhre „O“ übereinstimmend nachgewiesen ist, daß die zu Anfang dargestellte Theorie alle gefundenen Erscheinungen befriedigend beschreibt, und daß alle Verfahren übereinstimmend den gleichen Wert für die Abklinggeschwindigkeit der Nachwirkung ergeben, nämlich etwa  $10^4 \text{ Volt/sec}$  als Anfangswert und etwa  $3 \cdot 10^3 \text{ Volt/sec}$  als mittleren Wert.

Die interessante Frage, warum gerade in Röhre „O“, ebenso wie bei unseren Versuchen in Luft und in  $N_2$ , eine mittelrasche Hysteresis in so starkem Maße auftrat, während sie in allen anderen untersuchten Edelgasröhren fast gar nicht in Erscheinung trat, konnte nicht gelöst werden, weil wir leider unsere gemeinsame Arbeit infolge äußerer Gründe vorzeitig abbrechen mußten. Immerhin sind wir in der Lage, im folgenden einen Versuch mitzuteilen, der dafür spricht, daß unedle Gase, bei Röhre „O“ vermutlich als Verunreinigung, hierbei eine Rolle zu spielen scheinen. Es ist ja bekannt,



Fig. 18. „F<sup>Ne</sup>“,  
Intermittierende Entladung

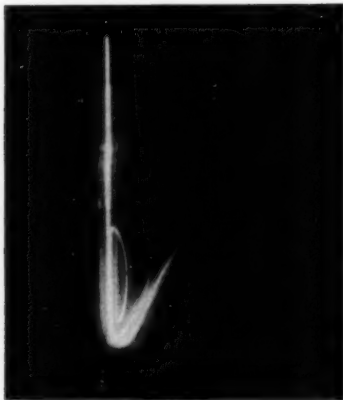


Fig. 19. „F<sup>Ne</sup>“, Intermittierende  
Entladung nach Erwärmung

daß Verunreinigungen in Edelgasen oft einen bedeutenden Einfluß auf Gasentladungsvorgänge ausüben. Einer endgültigen Stellungnahme müssen wir uns jedoch enthalten, weil der Versuch zu vereinzelt ist, um aus ihm eine Schlußfolgerung ziehen zu können.

Röhre „F<sup>Ne</sup>“, die ihrer Vorbehandlung wegen (1) sicherlich Spuren von  $O_2$  und  $H_2$  enthält, gab bei intermittierender Glimmentladung besonders starke Abweichungen der Strommaxima von der quasistat. Char. Fig. 18 ist ein Oszillogramm von intermittierenden Entladungen dieser Röhre bei variiertter Kapazität. Die Löschkurve bei größter Kapazität gibt ziemlich genau den Verlauf der quasistat. Char. Damit liegt für alle übrigen Kurven  $J_{\max}$  stark oberhalb dieser Charakteristik. Man wird aber im Zweifel sein müssen, ob dies eine Folge einer rascheren Hysteresis ist, weil keine ausgesprochenen *M*-Punkte feststellbar sind. Solche *M*-Punkte entstanden jedoch sehr deutlich, als die Röhre auf etwa  $250^\circ$  im Öl-

bad erhitzt wurde. Nach der Wiederabkühlung ging diese Erscheinung nur zum Teil zurück. Fig. 19 ist ein Oszillogramm intermittierender Entladungen der Röhre „F“ nach dem Wiedererkalten mit variiert Kapazität. Aus dieser Aufnahme folgt, daß die Spannungsgleichgeschwindigkeit der raschen Nachwirkung hier den hohen Wert von etwa  $10^5$  Volt/sec hat.

Ein ähnlicher Versuch mit einer technischen Glühlampe mißlang. Die Oszillogramme wiesen nach einer Erwärmung der Röhre bis auf  $450^\circ$  keine Änderung auf.

Ob die Verschiebung der Strommaxima nach oben in den Oszillogrammen intermittierender Entladungen bei kleiner Kapazität sich durchweg als Folge von rascheren Nachwirkungseffekten deuten läßt, kann auf Grund unserer Versuche nicht entschieden werden. Man wird auch daran denken müssen, daß bei Nachwirkungen, die mit einer Geschwindigkeit von  $10^5$  oder mehr Volt/sec abklingen, bereits eine Raumladungshysteresis vorliegen mag, deren Erscheinungsform komplizierterer Art sein kann, weil dann eine Raumladungskonfiguration nicht nur gegenüber Änderungen in Feldrichtung, sondern auch quer dazu berücksichtigt werden müßte. Es muß hier nochmals betont werden, daß wir die Trägheit einer Entladungsstrecke gegenüber Zustandsänderungen, insoweit sie nur von dem momentanen Zustand abhängig ist, folgerichtig nicht zu den Hysteresiserscheinungen gerechnet haben. Wenn wir hier von einer Raumladungshysteresis reden, so haben wir stets nur diejenige Wirkung der Raumladungen vor Auge, die von früher durchlaufenen Zuständen herrühren kann. Die Möglichkeit einer solchen Raumladungshysteresis ist ohne weiteres gegeben, da bei sehr rascher Zustandsänderung die Raumladungsverteilung eines  $J$ - $V$ -Punktes im Zustandsdiagramm sicherlich verschieden sein wird, wenn er auf verschiedenen Wegen mit verschiedenen Raumladungsverteilungen erreicht worden ist. Solche Raumladungsnachwirkungen dürften wohl nur auf Zeitstrecken derselben Größenordnung sich bemerkbar machen, wie die zum Aufbau einer Elektronenlawine erforderlichen, also bei Zustandsänderungen auftreten, die mit ähnlichen Geschwindigkeiten erfolgen wie der Entladungsaufbau selbst bei der Zündung. Denn es ist nicht anzunehmen, daß eine Änderung der Raumladungsverteilung durch eine Verschiebung der relativ trägen Ionen zustande kommt, sondern vielmehr durch die Bewegung der viel rascheren Elektronen, indem diese durch Stoß neu ionisieren und durch Anlagerung neutralisieren. Es darf deshalb aus den verhältnismäßig großen sogenannten Nachwirkungszeiten bei Wiederzündungen — Seeliger (4) hat  $10^{-3}$  sec gemessen und Valle (2) bei diskontinuier-

lichen Entladungen dieselbe Größenordnung für diese Zeit erhalten — keinesfalls auf entsprechende Abklingzeiten einer Raumladungsnachwirkung bei dynamischen Vorgängen geschlossen werden. Die von Seeliger und Valle gemessenen großen Nachwirkungszeiten sind sicherlich durch die Trägheit anderer Prozesse bedingt, nämlich der Ionenvernichtung durch Wiedervereinigung und Abwanderung.

Daß es auch Glimmentladungsröhren gibt, die abgesehen von der langsamen Temperaturnachwirkung, praktisch frei von Nachwirkungseffekten sind, beweist das Oszillogramm der Röhre „K“, Fig. 20. Die große Kurvenschleife gehört einer intermittierenden Entladung mit der kleinsten Kapazität, bei der überhaupt noch Intermittenzen zu erhalten waren. Trotzdem liegt  $J_{\max}$  nur sehr wenig oberhalb der mitaufgenommenen zugehörigen quasi-stat. Char. Bei der geringsten Verkleinerung der Kapazität ging die diskontinuierliche Entladung (1. Art) in Schwingungen bzw. in diskontinuierliche Entladungen 2. Art über. Zwei solcher Schwingungen auf dem fallenden Teil der quasi-stat. Char. sind in Fig. 20 gleichfalls photographiert.

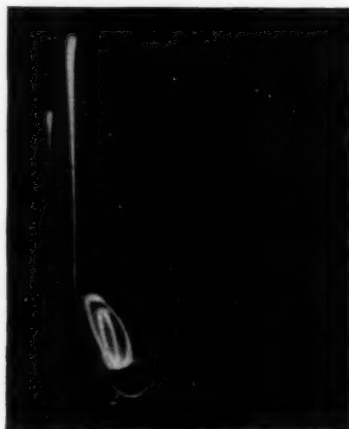


Fig. 20. „K“, Intermittierende Entladungen und Schwingungen

Zum Schluß zeigen wir noch ein Beispiel für eine nur *scheinbare* Hysteresis in Fig. 21. Es handelt sich um zwei Zustandskurven einer technischen Glimmlampe, die durch Überlagerung eines 40-periodigen Wechselstroms über den stationären Entladungsstrom mit der gleichen Aufnahmetechnik erhalten wurde, wie sie für Fig. 15 angewendet wurde. Die Schleifen der Zustandskurven kommen in diesem Fall dadurch zustande, daß die im Stromminimum erloschene Entladung in jeder Periode neu zündet und, der Geraden  $V = Z \cdot J R$  folgend, sich zunächst auf dem anfangs steigenden Teil der quasi-stat. Char. (Townsendgebiet) stabilisiert und dann infolge der Neigung der Widerstandsgeraden beim weiteren Stromanstieg den fallenden Teil der Charakteristik überspringt. Beim Rückgang des

Stromes findet ein ähnlicher Sprung aus dem Glimmgebiet in das Townsendgebiet statt. Beim Verlöschen durchläuft der Zustandspunkt den Rest der Charakteristik des Townsendgebietes. Bei der zweiten Kurve, die mit steilerer Widerstandsgeraden als die erste aufgenommen wurde, ist die Form der vollständigen Charakteristik

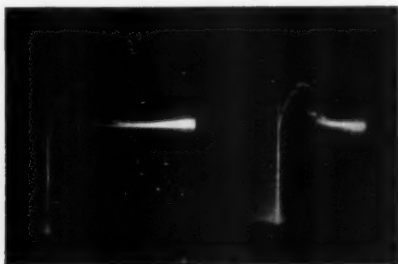
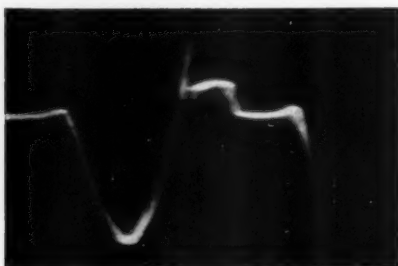


Fig. 21. „T“, Scheinbare Hysteresis bei Stufenzündung



0,02 sek

Fig. 22. „T“, Stufenzündung, V-t-Oszillogramm

ungefähr erkennbar. Dieses Oszillogramm ist auch insofern interessant, als hier offenbar eine stufenförmige Zündung (Townsend-Glimmentladung) vorliegt, ähnlich wie sie Rogowski (9) beim Funkendurchschlag (Glimm-Bogenentladung) beobachtet hat. In Fig. 22 zeigen wir ein Spannungs-Zeit-Oszillogramm dieses Phänomens.

#### Zusammenfassung

Wir haben Hysteresiserscheinungen an dynamischen Charakteristiken (dyn. Char'en) der Glimmentladung hauptsächlich in Edelgasen untersucht, neue Methoden dafür entwickelt und wohl überhaupt erstmalig mittelfast bis rasch abklingende Nachwirkungseffekte sicher bestimmt und gemessen. Wir haben eine neue theoretische

Darstellung dieser Effekte versucht, die es uns gestattete, den Einfluß verschiedener, gleichzeitiger Nachwirkungen auf den Ablauf von dyn. Char'en zu analysieren und vorauszusagen.

Die Notwendigkeit einer solchen Untersuchung ergab sich aus unseren früheren Arbeiten über dyn. Char'en. Das Strom-Spannungs-Diagramm einer zeitlich veränderlichen Glimmentladung ist keine eindeutige Zustandsebene der Entladung, wenn man Nachwirkungseffekte, die Hysteresiserscheinungen zur Folge haben, berücksichtigt. Eine solche Berücksichtigung kann jedoch besonders übersichtlich dadurch geschehen, daß man die eindeutig gedachte Zustandsebene sich zeitlich verändern läßt. Wir haben uns in der vorstehenden Arbeit nur mit der Phänomenologie dieser Veränderungen („Verzerrungen“) befaßt.

Eine besondere Aufnahmetechnik gestattet es, den Einfluß der sogenannten langsamen Hysteresis auf den Verlauf dynamischer Vorgänge oszillographisch zu ermitteln. An die Stelle der wirklich-statistischen Charakteristik tritt hierbei eine Schar von quasi-stat. Char'en mit zugehörigen Bezugsbelastungen, durch die eine Entladungsstrecke bereits viel besser charakterisiert ist, als durch die wirklich-stat. Char. allein. Dieser Sachverhalt läßt sich als eine Verzerrung einer eindeutig gedachten Zustandsebene deuten, wobei die Verzerrungsgeschwindigkeit durch die Abklinggeschwindigkeit der Nachwirkung bestimmt ist. In den untersuchten Fällen ließ sich die Verzerrung mit guter Annäherung als eine Parallelverschiebung der Strom-Spannungs-Ebene darstellen.

Es lag nahe, diese zunächst nur für die langsame Hysteresis gerechtfertigte Darstellungsweise auch auf rascher abklingende Nachwirkungen versuchsweise anzuwenden, was zu gutem Erfolg führte. Die quasi-stat. Char'en lassen sich in solche höherer Ordnung aufspalten, und die gesamte Verzerrung einer Zustandsebene läßt sich in einzelne Verzerrungen zerlegen. Durch ein neues Aufnahmeverfahren konnten rasch verlaufende dyn. Char'en auf ihre zugehörigen quasi-stat. Char'en 1. Ordnung bezogen werden. Dadurch gelang es, die langsame Hysteresis experimentell abzutrennen und raschere Hysteresiserscheinungen zu entdecken und zu untersuchen. Auf diese Weise wurden Zündvorgänge, ferner einer stationären Entladung aufgeprägte Schwingungen und schließlich intermittierende Entladungen untersucht. Es wurden mittelerasche bis rasche Nachwirkungseffekte mit Abklinggeschwindigkeiten von  $3 \cdot 10^3$  bis zu  $10^5$  Volt/sec gefunden. Verschiedene Methoden ergaben übereinstimmende Ergebnisse. In allen Fällen ließen sich die Hysteresiserscheinungen analysieren und sehr gut als Verzerrungen der Zustandsebene behandeln.

Die vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Kgl. Universität Parma im Herbst 1934 durchgeführt. Wir sind Herrn Prof. Dr. R. Seeliger, ebenso der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, dafür Dank schuldig, daß sie unsere Zusammenarbeit ermöglicht haben.

Ich möchte auch hier Herrn Prof. Dr. G. Valle, Direktor des Physikalischen Instituts in Parma, für die gastliche Aufnahme und Zeit gemeinsamer Arbeit meinen herzlichen Dank zum Ausdruck bringen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Gewährung eines Forschungsstipendiums zu großem Dank verpflichtet.

H. Gawehn

#### Literatur

- 1) H. Gawehn, *Ann. d. Phys.* [5] **20**. S. 601. 1934.
- 2) G. Valle, *Phys. Ztschr.* **27**. S. 473. 1926; *Nuovo Cim. (N.S.)*, **5**. S. 195. 1928.
- 3) A. Rüttenauer, *Ztschr. f. Phys.* **15**. S. 33. 1923.
- 4) R. Seeliger, *Jahrb. d. Radiakt. u. Elektr.* **20**. S. 353. 1924.
- 5) J. Herweg, *Phys. Ztschr.* **13**. S. 633. 1912.
- 6) W. Dällenbach, *Phys. Ztschr.* **27**. S. 448. 1926.
- 7) W. Kaufmann, *Ann. d. Phys.* **2**. S. 158. 1900.
- 8) G. Valle, *Ann. d. Phys.* [5] **13**. S. 732. 1932.
- 9) W. Rogowski, *Arch. Elektrot.* **20**. S. 99. 1928.

Parma, Istituto di Fisica della R. Università, und Berlin.



**Die Molekularsuszeptibilitäten  
einiger diamagnetischer Verbindungen  
in verschiedenen Lösungsmitteln**

**Von O. E. Frivold und H. Sogn**

In einer früher veröffentlichten Arbeit<sup>1)</sup> wurden unter anderem die Molekularsuszeptibilitäten einiger anorganischer Säuren und Salze, bestimmt durch magnetische Messungen in wäßrigen Lösungen, mitgeteilt. Bei der Auswertung der Meßresultate wurde die Additivität der magnetischen Eigenschaften in Lösungen vorausgesetzt. Die Konsequenzen, zu denen diese Voraussetzung führt, haben gezeigt, daß die Annahme in den meisten Fällen berechtigt ist. Besonders ist hier hervorzuheben, daß die Molekularsuszeptibilitäten der gelösten Säuren und Salze konzentrationsunabhängig sein müssen, wenn die magnetischen Eigenschaften additiv sind. Daß dies auch der Fall ist, haben die Meßresultate ergeben, wenn man von einer kleinen Abweichung bei HCl absieht. Auch seither ausgeführte, noch nicht veröffentlichte Messungen an NaCl, KCl, NaClO<sub>4</sub>, Ba(ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>, Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>, HNO<sub>3</sub> und HClO<sub>4</sub> in wäßriger Lösung haben das früher gefundene Resultat bestätigt.

Um die Additivitätsfrage näher zu untersuchen, wurden die Suszeptibilitäten einiger anorganischer Salze sowohl in wäßriger als auch in alkoholischer Lösung und in drei Fällen auch in Aceton als Lösungsmittel bestimmt. Sind nämlich die magnetischen Eigenschaften der Ionen der gelösten Verbindung und der Moleküle des Lösungsmittels ganz allgemein additiv, so folgt daraus, daß die aus den Messungen berechnete Molekularsuszeptibilität einer Verbindung von den Eigenschaften des Lösungsmittels unabhängig sein muß. Zu diesem Zwecke wurden folgende Salze verwendet: LiCl, LiBr, NaClO<sub>4</sub>, CaCl<sub>2</sub>, CaBr<sub>2</sub>, Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>, SrBr<sub>2</sub> und Ba(ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Resultate dieser Messungen mitgeteilt werden.

---

1) O. E. Frivold, Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität einiger diamagnetischer Verbindungen nebst Berechnung der Ionenssuszeptibilitäten, Avh. Oslo Matem.-Naturvid. Klasse 1933. Nr. 9.

**Experimentelles und Auswertung der Meßresultate**

Bei diesen Messungen wurde die von A. Piccard<sup>1)</sup> verbesserte Quincksche Steighöhenmethode benutzt. Durch Verwendung eines Thermostaten konnten alle Messungen bei 20° C ausgeführt werden. Ein Weißmagnet mit Wasserkühlung stand für diese Messungen zur Verfügung, wobei eine Feldstärke von 24800 Oe verwendet wurde. Die Steighöhen wurden unter einer Wasserstoffatmosphäre gemessen.

Da Wasserstoff keinen merkbaren Einfluß auf die Steighöhen ausübt, ergibt sich die Suszeptibilität der Lösung aus folgender einfacher Gleichung:

$$(1) \quad \psi_l = \psi_s \frac{h_l}{h_s}.$$

Hier sind  $\psi_l$  und  $\psi_s$  die Massensuszeptibilitäten der Lösung bzw. des Lösungsmittels.  $h_l$  und  $h_s$  geben die gemessenen Steighöhen der Lösung bzw. des Lösungsmittels unter Einwirkung des magnetischen Feldes an.

Bei der Berechnung der Molekularsuszeptibilitäten der gelösten Salze wurde wie früher (a. a. O.) die Wiedemannsche Regel verwendet.

$$(2) \quad A \psi_l = \psi_m + (A - M) \psi_s.$$

Hier ist  $A$  die Verdünnung in Gramm Lösung pro Grammolekül gelöster Stoff und  $M$  das Molekulargewicht des gelösten Stoffes.  $\psi_l$  und  $\psi_s$  geben wie früher die Massensuszeptibilitäten der Lösung bzw. des Lösungsmittels,  $\psi_m$  die Molekularsuszeptibilität der Verbindung an.

Die Massensuszeptibilität der Lösung bei verschiedenen Konzentrationen wurde nach Gl. (1) bestimmt und die molekulare Suszeptibilität des gelösten Salzes mit Hilfe von Gl. (2) durch eine graphische Methode ermittelt, wobei Gl. (2) folgende Veränderung erfuhr:

$$(3) \quad A(\psi_l - \psi_s) = 1000 \frac{\psi_l - \psi_s}{C} = \psi_m - M \cdot \psi_s.$$

Hier bedeutet  $C$  die Konzentration des gelösten Salzes in Mol pro 1000 g-Lösung. Zeichnet man nun  $\psi_l - \psi_s$  in Abhängigkeit von  $C$  in ein Koordinatensystem ein, so zeigt es sich in allen hier untersuchten Fällen, daß eine lineare Abhängigkeit zwischen  $\psi_l - \psi_s$  und  $C$  besteht.

Aus der graphischen Darstellung entnimmt man  $\frac{\psi_l - \psi_s}{C}$ .  $\psi_m$  wird dann mittels Gl. (3) berechnet, indem man für  $\psi_s$  die Suszeptibilität des Lösungsmittels einsetzt. Für die Suszeptibilität

1) A. Piccard, Arch. sc. phys. et nat. **35**, S. 343. 1913. Die von Herrn S. Koch im hiesigen physikalischen Institut vorgenommenen Verbesserungen sind in „Avh. Oslo“ I Mat. Naturvid. Kl. 1932 Nr. 7, beschrieben.

des Wassers wurde der von A. Piccard und A. Divaud<sup>1)</sup> gefundene Wert  $\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$  bei 20° C benutzt.

Die Suszeptibilität des als Lösungsmittel verwendeten Alkohols bzw. Acetons wurde vor Herstellung der Lösungen mittels der Steighöhenmethode gemessen, indem man reines Wasser als Eichsubstanz benutzte.

#### Lösungsmittel und verwendete Salze

Das verwendete Wasser wurde über Permanganat und Baryt durch einen Glaskühler destilliert. Der als Ausgangsmaterial verwendete Alkohol stammte aus dem hiesigen staatlichen Weinmonopol und enthielt etwa 95%  $C_2H_5OH$ . In einigen Fällen wurde das Ausgangsmaterial nur einmal mit Kühler destilliert. Vorlauf und Restlauf wurden nicht verwendet. Um beinahe absoluten Alkohol herzustellen, wurde auf jedes Liter des Ausgangsmaterials etwa 0,5 kg gebrannter Kalk zugesetzt und etwa 24 Std. am Rückflußkühler zum Sieden erhitzt. Später wurde der Alkohol in üblicher Weise destilliert. Um den Zutritt von Wasserdampf aus der Luft zu verhindern, war der Destillationsapparat mit einem  $CaCl_2$ -Rohr versehen. Die Dichte der verwendeten Probe (mittlere Fraktion) wurde mit Hilfe eines Pyknometers bestimmt. Der Prozentgehalt des Alkohols konnte dann aus Landolt-Börnsteins Tabellen entnommen werden.

Das verwendete Aceton wurde von Merck bezogen. Es wurde erst mit  $CaCl_2$  getrocknet. Nachher wurde das Aceton abdestilliert. Während der Destillation der Hauptfraktion wurde die richtige Siedetemperatur (56,3° C bei 76 cm Hg-Druck) beobachtet.

Die Dichte einer der verwendeten Hauptfraktionen wurde mit Hilfe eines Pyknometers bestimmt. Es wurde die Dichte =  $0,79294 \text{ g/cm}^3$  bei 20° C gefunden. Der entsprechende Prozentgehalt Aceton — 99,7 — konnte dann aus einer Arbeit von Krug entnommen werden<sup>2)</sup>.

Das verwendete  $CaCl_2$  war ein Mercksches „Pro Analysi“-Präparat. Das verwendete  $Ba(ClO_4)_2$  war ein „Laboratorienpräparat“ von Schuchardt. Die Messungen mit  $Ca(NO_3)_2$  wurden mit „Laboratorienpräparaten“ von Merck und Kahlbaum vorgenommen. Die Meßresultate sind innerhalb der Fehlergrenzen dieselben. Die übrigen verwendeten Salze ( $LiCl$ ,  $LiBr$ ,  $NaClO_4$ ,  $CaBr_2$  und  $SrBr_2$ ) sind die reinsten Laboratorienpräparate, welche Kahlbaum liefert.

Folgende Tabelle zeigt, bei welchen Temperaturen die Entwässerung vorgenommen wurde:

1) A. Piccard u. A. Divaud, Arch. sc. phys. et nat. (5) 2. S. 455. 1920.

2) Krug, Ztschr. f. analyt. Chem. 32. S. 106. 1893.

LiCl in °	LiBr in °	NaClO <sub>4</sub> in °	CaCl <sub>2</sub> in °	CaBr <sub>2</sub> in °	Ca(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> in °	SrBr <sub>2</sub> in °	Ba(ClO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> in °
150	160	70–80	260	250	150	150	100

Sämtliche Salze lösen sich in Wasser bei den in Betracht kommenden Konzentrationen leicht auf. SrBr<sub>2</sub> ist auch in Alkohol leicht löslich. In den anderen Fällen wurden die Lösungen bei den stärksten Konzentrationen entweder ein wenig trüb oder es blieb ein wenig Salz ungelöst (LiCl). Da die Konzentrationen durch Wägung bestimmt wurden, war es deshalb zu befürchten, daß die Meßresultate mit einem systematischen Fehler behaftet waren. Um diese Möglichkeit näher zu untersuchen wurde in einigen Fällen das ungelöste Salz abfiltriert und die abfiltrierte Menge bei Berechnung der Konzentration in Rechnung gezogen. Bei diesen Kontrollversuchen stellte es sich heraus, daß die ungelöst gebliebenen Mengen so minimal sind, daß sie keinen merkbaren Einfluß auf die Konzentrationsangaben ausüben.

#### Meßresultate

In den Tabellen 1–18 findet man die Meßresultate tabellarisch zusammengestellt.  $C$  bedeutet die Konzentration in Molen des gelösten Stoffes auf 1000 g-Lösung. Dann folgt die Massenssuszeptibilität der Lösung  $\psi_l$  und die Differenz aus dieser Größe und der Suszeptibilität des Lösungsmittels  $\psi_s = \psi_{\text{Wasser}}$  bzw.  $\psi_{\text{Alkohol}}$  oder  $\psi_{\text{Aceton}}$ . An der Spitze der Tabellen sind die Molekulargewichte ( $M$ ) der untersuchten Verbindungen, die Massenssuszeptibilität des Wassers ( $\psi_w$ ) bzw. des Alkohols ( $\psi_{\text{Alk.}}$ ) oder Acetons ( $\psi_{\text{Ac.}}$ ) und die Meßtemperatur angegeben. Weiterhin findet man die aus den graphischen Darstellungen entnommenen Werte von

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_w}{C} \text{ bzw. } 1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}}{C} \text{ oder } 1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}}{C}.$$

Schließlich findet man noch  $M\psi_w$ , bzw.  $M\psi_{\text{Alk.}}$  und  $M\psi_{\text{Ac.}}$  und die mittels Gl. (3) berechneten Molekularsuszeptibilitäten  $\psi_m$ .

Tabelle 1  
LiCl in H<sub>2</sub>O

$$M = 42,40$$

$$t = 20^\circ \text{ C}$$

$$\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_w}{C} = 6,33 \cdot 10^{-6}$$

$$M\psi_w = -30,52 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -24,2 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$
0,965	0,7138	0,0061	1,745	0,7097	0,0102
1,176	0,7119	0,0080	2,262	0,7058	0,0141
1,404	0,7112	0,0087	2,430	0,7045	0,0154

Tabelle 2

LiCl in  $C_2H_5OH$  (94,2%)

$$M = 42,40$$

$$t = 20^\circ C$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_{Alk.}}{C} = 6,9 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{Alk.}^1) = -31,1 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -24,2 \cdot 10^{-6}$$

Erste Meßserie

$$\psi_{Alk.} = -0,7335 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßserie

$$\psi_{Alk.} = -0,7337 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{Alk.}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{Alk.}) \cdot 10^6$
0,83	0,7290	0,0045	1,07	0,7248	0,0089
1,29	0,7242	0,0093	1,98	0,7201	0,0136
1,44	0,7234	0,0101	2,79	0,7165	0,0172
1,66	0,7217	0,0118			
2,13	0,7205	0,0130			
2,83	0,7142	0,0193			

Tabelle 3

LiBr in  $H_2O$ 

$$M = 86,86$$

$$t = 20^\circ C$$

$$\psi_m = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_m}{C} = 26,5 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_m = -62,53 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -36,0 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_m) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_m) \cdot 10^6$
0,503	0,7071	0,0128	0,937	0,6948	0,0251
0,659	0,7033	0,0166	1,097	0,6908	0,0291
0,694	0,7018	0,0181	1,418	0,6824	0,0375
0,836	0,6991	0,0208	1,970	0,6667	0,0532

Tabelle 4

LiBr in  $C_2H_5OH$  (94,9%)

$$t = 20^\circ C$$

$$\psi_{Alk.} = -0,7367 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_{Alk.}}{C} = 28,5 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{Alk.} = -64,0 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -35,5 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{Alk.}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{Alk.}) \cdot 10^6$
0,499	0,7217	0,0150	1,134	0,7053	0,0314
0,820	0,7152	0,0215	1,414	0,6948	0,0419
0,891	0,7121	0,0246	1,978	0,6800	0,0567

1) Der verwendete Wert von  $\psi_{Alk.}$  ist hier der Mittelwert von

$$\psi_{Alk.} = -0,7335 \cdot 10^{-6} \text{ und } \psi_{Alk.} = -0,7337 \cdot 10^{-6}.$$

In den folgenden Tabellen ist in den Fällen, wo zwei Meßserien vorliegen, in derselben Weise vorgegangen.

Tabelle 5  
NaClO<sub>4</sub> in H<sub>2</sub>O

$$\begin{aligned}
 M &= 122,45 & 1000 \frac{\psi_l - \psi_w}{C} &= 49,20 \cdot 10^{-6} \\
 t &= 20^\circ \text{ C} & M\psi_w &= -88,15 \cdot 10^{-6} \\
 \psi_w &= -0,7199 \cdot 10^{-6} & \psi_m &= -39,0 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$
0,510	0,6949	0,0250	1,226	0,6593	0,0606
0,674	0,6869	0,0330	1,385	0,6514	0,0685
1,077	0,6674	0,0525	1,617	0,6399	0,0800

Tabelle 6  
NaClO<sub>4</sub> in C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH (99,9<sub>8</sub>%)

$$\begin{aligned}
 M &= 122,45 & 1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}}{C} &= 54,38 \cdot 10^{-6} \\
 t &= 20^\circ \text{ C} & M\psi_{\text{Alk.}} &= -89,89 \cdot 10^{-6} \\
 & & \psi_m &= -35,5 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Erste Me\ssserie} & & \text{Zweite Me\ssserie} \\
 \psi_{\text{Alk.}} &= -0,7333 \cdot 10^{-6} & \psi_{\text{Alk.}} &= -0,7349 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$
0,254	0,7190	0,0143	0,421	0,7122	0,0227
0,644	0,6980	0,0353	0,802	0,6919	0,0430
			0,803	0,6911	0,0438

Tabelle 7  
NaClO<sub>4</sub> in 100%igem Aceton

$$\begin{aligned}
 M &= 122,45 & 1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}}{C} &= 34,90 \cdot 10^{-6} \\
 t &= 20^\circ \text{ C} & M\psi_{\text{Ac.}} &= -71,75 \cdot 10^{-6} \\
 & & \psi_m &= -36,9 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Erste Me\ssserie} & & \text{Zweite Me\ssserie} \\
 \psi_{\text{Ac.}} &= -0,5858 \cdot 10^{-6} & \psi_{\text{Ac.}} &= -0,5861 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}) \cdot 10^6$
0,541	0,5666	0,0192	0,724	0,5601	0,0260
1,320	0,5384	0,0474	1,307	0,5408	0,0453
1,943	0,5187	0,0671	1,562	0,5346	0,0515
			1,829	0,5220	0,0641

Tabelle 8

CaCl<sub>2</sub> in H<sub>2</sub>O

$$M = 110,99$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

$$\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_w}{C} = 23,25 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_w = -79,90 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -56,7 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^{-6}$
0,242	0,7147	0,0052	1,254	0,6893	0,0306
0,269	0,7138	0,0061	1,319	0,6899	0,0300
0,687	0,7039	0,0160	1,533	0,6827	0,0372
0,779	0,7028	0,0171	1,809	0,6775	0,0424
0,900	0,7004	0,0195			

Tabelle 9

CaCl<sub>2</sub> in C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH (94,1 %)

$$M = 110,99$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

Erste Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = -0,7336 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}}{C} = 26,6 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{\text{Alk.}} = -81,42 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -54,8 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = -0,7338 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$
0,337	0,7244	0,0092	0,536	0,7195	0,0143
0,691	0,7156	0,0180	1,047	0,7053	0,0280
1,046	0,7060	0,0276	1,554	0,6921	0,0417

Tabelle 10

CaBr<sub>2</sub> in H<sub>2</sub>O

$$M = 199,91$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

$$\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_w}{C} = 65,4 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_w = -143,9 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -78,5 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^6$
0,162	0,7084	0,0115	0,685	0,6745	0,0454
0,318	0,6994	0,0205	0,779	0,6698	0,0501
0,528	0,6853	0,0346	0,938	0,6586	0,0613



Tabelle 11  
CaBr<sub>2</sub> in C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH (94,4<sub>8</sub> %)

$$M = 199,91$$

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}}{C} = 72,5 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{\text{Alk.}} = - 147,0 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = - 74,5 \cdot 10^{-6}$$

Erste Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = - 0,7356 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = - 0,7351 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$
0,586	0,6933	0,0423	0,231	0,7181	0,0170
0,760	0,6794	0,0562	0,455	0,7013	0,0338
			0,868	0,6741	0,0610
			1,098	0,6562	0,0789

Tabelle 12

Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> in H<sub>2</sub>O

$$M = 164,09$$

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$\psi_m = - 0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_m}{C} = 72,25 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_m = - 118,13 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = - 45,9 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_m) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_m) \cdot 10^6$
0,287	0,6989	0,0210	0,818	0,6610	0,0589
0,335	0,6951	0,0248	0,836	0,6604	0,0595
0,434	0,6889	0,0310	0,957	0,6504	0,0695
0,525	0,6821	0,0378	1,015	0,6465	0,0734
0,686	0,6699	0,0500			

Tabelle 13

Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> in C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH (99,9<sub>8</sub> %)

$$M = 164,09$$

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}}{C} = 77,0 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{\text{Alk.}} = - 120,62 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = - 43,6 \cdot 10^{-6}$$

Erste Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = - 0,7356 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßserie

$$\psi_{\text{Alk.}} = - 0,7358 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$
0,505	0,6948	0,0408	0,377	0,7052	0,0306
0,802	0,6751	0,0605	1,081	0,6531	0,0827
1,146	0,6468	0,0888	1,297	0,6395	0,0963

Tabelle 14

Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> in 100%igem Aceton

$$M = 164,09$$

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}}{C} = 50,2 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{\text{Ac.}} = -96,2 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -46,0 \cdot 10^{-6}$$

Erste Meßreihe

$$\psi_{\text{Ac.}} = -0,5863 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßreihe

$$\psi_{\text{Ac.}} = -0,5864 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Ac.}}) \cdot 10^6$
0,317	0,5715	0,0148	0,650	0,5538	0,0326
0,800	0,5458	0,0405	0,790	0,5468	0,0396
1,104	0,5294	0,0569	1,362	0,5190	0,0674

Tabelle 15

SrBr<sub>2</sub> in H<sub>2</sub>O

$$M = 247,46$$

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_w}{C} = 90,2 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_w = -178,1 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -87,9 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_w) \cdot 10^6$
0,280	0,6948	0,0251	0,530	0,6723	0,0476
0,302	0,6930	0,0269	0,787	0,6493	0,0706
0,507	0,6743	0,0456	0,874	0,6418	0,0781

Tabelle 16

SrBr<sub>2</sub> in C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH (93,6%<sub>o</sub>)

$$t = 20^{\circ} \text{ C}$$

$$\psi_{\text{Alk.}} = -0,7346 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}}{C} = 96,4 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{\text{Alk.}} = -181,8 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -85,4 \cdot 10^{-6}$$

$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$	$C$	$-\psi_l \cdot 10^6$	$(\psi_l - \psi_{\text{Alk.}}) \cdot 10^6$
0,283	0,7072	0,0274	0,553	0,6813	0,0533
0,332	0,7025	0,0321	0,698	0,6675	0,0671
			0,718	0,6658	0,0688
			0,901	0,6483	0,0863

Tabelle 17  
Ba(ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub> in H<sub>2</sub>O

$$M = 336,27$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

$$\psi_w = -0,7199 \cdot 10^{-6}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_w}{C} = 150,6 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_w = -242,1 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -91,5 \cdot 10^{-6}$$

C	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^6$	C	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_w) \cdot 10^6$
0,1268	0,6999	0,0200	0,292	0,6756	0,0443
0,1696	0,6949	0,0250	0,377	0,6626	0,0573
0,2070	0,6882	0,0317	0,513	0,6439	0,0760

Tabelle 18  
Ba(ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub> in 100 %igem Aceton

$$M = 336,27$$

$$t = 20^\circ \text{C}$$

$$1000 \frac{\psi_t - \psi_{Ac.}}{C} = 106,0 \cdot 10^{-6}$$

$$M \psi_{Ac.} = -197,0 \cdot 10^{-6}$$

$$\psi_m = -91,0 \cdot 10^{-6}$$

Erste Meßserie

$$\psi_{Ac.} = -0,5859 \cdot 10^{-6}$$

Zweite Meßserie

$$\psi_{Ac.} = -0,5858 \cdot 10^{-6}$$

C	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{Ac.}) \cdot 10^6$	C	$-\psi_t \cdot 10^6$	$(\psi_t - \psi_{Ac.}) \cdot 10^6$
0,1827	0,5665	0,0194	0,2223	0,5629	0,0229
0,3307	0,5508	0,0351	0,4287	0,5397	0,0461
0,4400	0,5390	0,0469	0,5713	0,5253	0,0605

#### Diskussion der Meßresultate

In Tabellen 19, 20 und 21 sind die Meßresultate summarisch zusammengestellt. In der zweiten und dritten Kolonne findet man die Molekularsuszeptibilitäten der am Anfang der Zeilen angegebenen Verbindungen in Wasser ( $\psi_m, \text{H}_2\text{O}$ ) bzw. in Alkohol ( $\psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ) oder in Aceton ( $\psi_m, \text{CH}_3\text{COCH}_3$ )

Tabelle 19

	$-\psi_m, \text{H}_2\text{O} \cdot 10^6$	$-\psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} \cdot 10^6$	$\Delta = -10^6$ [ $\psi_m, \text{H}_2\text{O} - \psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ]	$\Delta$ in %	% $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$
LiCl . . .	24,2	24,2	0	0	94,2
LiBr . . .	36,0	35,5	+ 0,5	+ 1,4	94,9
CaCl <sub>2</sub> . . .	56,7	54,8	+ 1,9	+ 3,2	94,2
CaBr <sub>2</sub> . .	78,5	74,5	+ 4,0	+ 5,1	94,5
SrBr <sub>2</sub> . . .	87,9	83,4	+ 2,5	+ 3,1	93,6

Tabelle 20

	$-\psi_m, \text{H}_2\text{O} \cdot 10^6$	$-\psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} \cdot 10^6$	$\Delta = -10^6$ $[\psi_m, \text{H}_2\text{O} - \psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]$	$\Delta$ in %	% $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$
$\text{NaClO}_4$	39,0	35,5	+ 3,5	+ 9,0	99,9 <sub>8</sub>
$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	45,9	43,6	+ 2,3	+ 5,2	99,9 <sub>8</sub>

Tabelle 21

	$-\psi_m, \text{H}_2\text{O} \cdot 10^6$	$-\psi_m, \text{CH}_3\text{COCH}_3 \cdot 10^6$	$\Delta = -10^6$ $[\psi_m, \text{H}_2\text{O} - \psi_m, \text{CH}_3\text{COCH}_3]$	$\Delta$ in %	% $\text{CH}_3\text{COCH}_3$
$\text{NaClO}_4$	39,0	36,9	+ 2,1	+ 5,4	100
$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	45,9	46,0	- 0,1	- 0,2	100
$\text{Ba}(\text{ClO}_4)_2$	91,5	91,0	+ 0,5	+ 0,5	100

Dann folgt in der vierten Kolonne die Differenz  $-10^6 [\psi_m, \text{H}_2\text{O} - \psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]$  oder  $-10^6 [\psi_m, \text{H}_2\text{O} - \psi_m, \text{CH}_3\text{COCH}_3]$ . In der fünften und der sechsten Kolonne sind die prozentualen Abweichungen bzw. der Prozentgehalt des benutzten Alkohols und des Acetons angegeben.

Bei der verwendeten, verbesserten Steighöhenmethode dürfte der Meßfehler bei den Molekularsuszeptibilitäten 2–5 Einheiten der letztangegebenen Ziffer nicht übersteigen. Die Differenzen  $\Delta$  in der fünften Kolonne sollten deshalb nicht mit einem Fehler von mehr als etwa  $\pm 0,7$  behaftet sein.

Aus den Tabellen 19, 20 und 21 geht hervor, daß die Molekularsuszeptibilitäten der untersuchten Verbindungen in wäßriger Lösung und in den verwendeten nichtwäßrigen Lösungsmitteln in den meisten Fällen prozentual nicht sehr verschieden sind. Bei LiCl wurde kein Unterschied zwischen  $\psi_m, \text{H}_2\text{O}$  und  $\psi_m, \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  gefunden. In einigen Fällen liegen die betreffenden Differenzen innerhalb der Fehlergrenze. In den meisten Fällen aber sind die gefundenen Unterschiede so groß, daß diese ihre Erklärung nicht durch Versuchsfehler finden können. Es ist auch bemerkenswert, daß in den meisten Fällen die Differenzen  $-10^6 [\psi_m, \text{Wasser} - \psi_m, \text{Alkohol}]$  bzw.  $-10^6 [\psi_m, \text{Wasser} - \psi_m, \text{Aceton}]$  positive Werte zeigen. Das will aber soviel sagen, als daß in der Mehrzahl der Fälle der Diamagnetismus der untersuchten Verbindungen in wäßriger Lösung größer ist als in den untersuchten nichtwäßrigen Lösungen.

Diese Resultate wirken indessen nicht überraschend, wenn man der polarisierenden Wirkung der Ionen auf die Moleküle des Lösungs-

mittels Rechnung trägt. In Lösung ist der mittlere Abstand der Ionen (vollständige Dissoziation vorausgesetzt) so groß, daß man die gegenseitige polarisierende Wirkung der Ionen aufeinander voraussichtlich im Vergleich zu der polarisierenden Wirkung der Ionen auf die Moleküle des Lösungsmittels vernachlässigen darf. Infolge der letztgenannten Wirkung muß man damit rechnen, daß die Suszeptibilität des Lösungsmittels geändert wird. Diese Wirkung wird sich aber in einer Beeinflussung der berechneten Molekularsuszeptibilitäten der gelösten Salze äußern. Nimmt man weiterhin an, daß diese Beeinflussung in den verschiedenen Lösungsmitteln verschieden ist, werden die beobachteten Unterschiede der Molekularsuszeptibilitäten in den verschiedenen Lösungsmitteln verständlich.

#### Zusammenfassung

1. Es werden in dieser Notiz magnetische Messungen an einigen anorganischen Verbindungen in Wasser, Alkohol und Aceton mitgeteilt.

2. Indem man die Wiedemannsche Regel zugrunde legte, wurden die Molekularsuszeptibilitäten folgender Verbindungen sowohl in wäßriger Lösung als auch in Alkohol bestimmt:  $\text{LiCl}$ ,  $\text{LiBr}$ ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{CaBr}_2$ ,  $\text{SrBr}_2$ ,  $\text{NaClO}_4$ ,  $\text{Ca(NO}_3)_2$ . Die Molekularsuszeptibilitäten von  $\text{NaClO}_4$ ,  $\text{Ca(NO}_3)_2$  und  $\text{Ba(ClO}_4)_2$  wurden sowohl in Wasser als auch in Aceton bestimmt.

3. Die Meßresultate zeigen, daß die Molekularsuszeptibilitäten der in Wasser gelösten Salze in den meisten Fällen numerisch größer sind als diejenigen der in den beiden nichtwäßrigen Lösungsmitteln gelösten Salze. In einigen Fällen liegen die genannten Unterschiede jedoch innerhalb der Fehlergrenze.

4. Die Meßresultate zeigen, daß die magnetischen Eigenschaften diamagnetischer Verbindungen nicht streng genommen additiv sind.

Diese Untersuchung wurde mit Unterstützung des „Statens videnskapelige Forskningsfond“ und des „Nansenfond“ durchgeführt. Den Verwaltern dieser Stiftungen möchten wir hier für die bewilligte Unterstützung unseren ergebensten Dank aussprechen.

Oslo, Physikalisches Institut der Universität. Juni 1935.

(Eingegangen 20. Juni 1935)

**Über die diamagnetischen Eigenschaften  
anorganischer Verbindungen in wäßriger Lösung  
und im festen Zustande**

**Von M. Flordal und O. E. Frivold**

Vor einigen Jahren hat R. Hocart<sup>1)</sup> die Molekularsuszeptibilitäten sehr reiner Präparate von NaCl, KCl und CaCl<sub>2</sub>, sowohl im kristallinischem Zustande als auch in wäßriger Lösung, mittels genauer Meßanordnungen bestimmt, und gefunden daß die Molekularsuszeptibilitäten der genannten diamagnetischen Salze im kristallinischen Zustande kleiner sind als in wäßriger Lösung. Nach Hocart ist bei

$$\begin{array}{ll} \text{NaCl, } \psi_{m, \text{Krist.}} = -30,1 \cdot 10^{-6} & \text{und } \psi_{m, \text{Lös.}} = -30,8 \cdot 10^{-6} \\ \text{bei KCl } \psi_{m, \text{Krist.}} = -39,1 \cdot 10^{-6} & \text{und } \psi_{m, \text{Lös.}} = -39,6 \cdot 10^{-6} \\ \text{bei CaCl}_2 \psi_{m, \text{Krist.}} = -54,5 \cdot 10^{-6} & \text{und } \psi_{m, \text{Lös.}} = -55,6 \cdot 10^{-6}. \end{array}$$

Die Unterschiede der Molekularsuszeptibilitäten der Salze in Lösung und im festen Zustande sind zwar nicht groß, aber die gemessenen Unterschiede liegen nach Hocart außerhalb der Fehlergrenzen.

Da Hocart nur die Suszeptibilitäten von drei Salzen in festem Zustande und in Lösung bestimmt hat, lag es nahe zu untersuchen, ob das gefundene Resultat auch für andere Salze zutrifft.

Bei den in der vorliegenden Notiz mitgeteilten Messungen wurden sowohl ein-einwertige als auch ein-zweiwertige Verbindungen verwendet. Besteht nämlich ein Unterschied der Suszeptibilität eines Salzes in Lösung und im festen Zustande, so ist es aus theoretischen Gründen zu erwarten, daß die Differenzen bei Salzen, welche aus mehrwertigen Ionen bestehen, größer sein werden als bei Salzen, welche aus einwertigen Ionen zusammengesetzt sind.

**Die verwendeten Salze**

Es wurden folgende Salze gemessen: LiCl, LiBr, NaCl, KF, KCl, KBr, KJ, CaCl<sub>2</sub>, CaBr<sub>2</sub>, SrCl<sub>2</sub>, BaCl<sub>2</sub>, ZnCl<sub>2</sub>, CdBr<sub>2</sub> und K<sub>4</sub>Fe(CN)<sub>6</sub>.

1) R. Hocart, Diamagnétisme de quelques composés binaires halogénés. C. R. 188 II, S. 1151, 1929.

Von diesen Salzen sind NaCl, KCl, KBr, KJ,  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{BaCl}_2$ ,  $\text{ZnCl}_2$  und  $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$  „Pro Analysi“-Präparate. Das verwendete  $\text{CdBr}_2$  war das reinste Präparat, das die Byk-Guldenwerke liefern. Die übrigen zur Verwendung gelangten Salze sind die reinsten Präparate (Laboratorienpräparate), welche Kahlbaum liefert.

Folgende Zusammenstellung zeigt, bei welchen Temperaturen die Entwässerung vorgenommen wurde.

LiCl	LiBr	NaCl	KF	KCl	KBr	KJ
100—150°	160—180	200	100—150	200	200	180—200

$\text{CaCl}_2$	$\text{CaBr}_2$	$\text{SrCl}_2$	$\text{BaCl}_2$	$\text{ZnCl}_2$	$\text{CdBr}_2$	$\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$
250—300	250—300	160—300	180	150—200	150—250	150—180

#### Meßmethoden und Meßresultate

Die Suszeptibilitäten der festen Salze wurden mittels der Pendelmethode<sup>1)</sup> und die Suszeptibilitäten der Salze in Lösung mittels der Steighöhenmethode<sup>2)</sup> gemessen. Um die Suszeptibilitäten bezogen auf Vakuum bei der Pendelmethode angeben zu können, muß man den Einfluß der Luft berücksichtigen. Der für diesen Zweck benutzte Wert der Massensuszeptibilität der Luft,  $+24,16 \cdot 10^{-6}$ , wurde aus „Critical Tables“ entnommen. Als Eichsubstanz bei der Pendelmethode und als Eichsubstanz und Lösungsmittel bei der Steighöhenmethode wurde über Permanganat und Baryt durch einen Glaskühler destilliertes Wasser verwendet. Die Massensuszeptibilität des Wassers bezogen auf Vakuum ist nach A. Piccard und A. Devaud  $-0,7199 \cdot 10^{-6}$ .

Bei der Berechnung des Molekularsuszeptibilitäten der in Wasser gelösten Salze wurde die Wiedemannsche Regel zugrunde gelegt. In einer früher veröffentlichten Arbeit<sup>3)</sup> sind die Meßresultate, die mit der Steighöhenmethode gefunden wurden, mit Ausnahme derjenigen von NaCl und KCl, tabellarisch zusammengestellt.

Es sollen deshalb an dieser Stelle nur die bei den verschiedenen Konzentrationen gefundenen Molekularsuszeptibilitäten von NaCl und KCl mitgeteilt werden.

1) G. Föex u. R. Forrer, Journ. d. phys. et le Radium. 7, Serie 6. S. 180. 1926.

2) A. Piccard, Arch. Sc. phys. et nat. 35. S. 343. 1913.

3) O. E. Frivold, Bestimmung der magnetischen Suszeptibilitäten einiger diamagnetischen Verbindungen nebst Berechnung der Ionensuszeptibilitäten, Avh. Oslo, Matem.-Naturvid. Klasse 1933, No. 9. Vgl. auch die vorhergehende Arbeit von O. E. Frivold u. H. Sogn.



In Tabellen 1 und 2 gibt  $C$  die Konzentration des Salzes, ausgedrückt in Molen pro 1000 g Lösung,  $\psi_m$  die Molekularsuszeptibilität des gelösten Salzes an. Bei der Mittelwertbildung ist das „Gewicht“ der einzelnen Messungen der Konzentration  $C$  proportional gesetzt worden.

Tabelle 1

NaCl

C	$-\psi_m \cdot 10^6$
0,448	29,37
0,781	30,17
1,210	30,93
1,547	29,92
1,898	30,49
1,938	30,57
2,351	30,64
2,446	30,35
3,381	30,16

Mittelwert  $\psi_m = -30,4 \cdot 10^{-6}$ 

Tabelle 2

KCl

C	$-\psi_m \cdot 10^6$
0,546	39,77
1,040	38,87
1,564	39,55
1,974	39,20
2,031	39,64
2,512	39,59

Mittelwert  $\psi_m = -39,4 \cdot 10^{-6}$ 

Die Massensuszeptibilität  $\psi_i$  der Lösung wurde gemessen und  $\psi_m$  mit Hilfe der Gleichung

$$(1) \quad \psi_m = A \psi_i - (A - M) \psi_w$$

berechnet. Hier bedeutet  $\psi_w$  die Massensuszeptibilität des Wassers,  $M$  das Molekulargewicht des gelösten Salzes und  $A$  die Verdünnung in Gramm Lösung pro Grammolekül  $\left(A = \frac{1000}{C}\right)^1$ .

In Tabellen 3 und 4 findet man die mittels der Pendelmethode gefundenen Molekularsuszeptibilitäten der festen Salze tabellarisch zusammengestellt.

Tabelle 3

 $-\psi_m \cdot 10^6$ 

	LiCl	LiBr	NaCl	KF	KCl	KBr	KJ
	24,28	34,64	30,86	23,36	39,08	49,68	67,58
	24,17	34,71	30,95	23,03	38,53	49,52	66,86
	24,34			22,78		49,50	66,91
	24,24			22,73			
Mittelwerte:	24,3	34,7	30,9	23,0	38,8	49,6	67,1

1) In der obenangeführten Arbeit (a. a. O.) wurde bei der Berechnung von  $\psi_m$  eine graphische Methode verwendet, indem man die Wiedemannsche Regel Gl. (1) zugrunde legte. Es hat sich herausgestellt, daß die hier bei NaCl und KCl verwendete und die früher benutzte Methode übereinstimmende Resultate geben.

Tabelle 4

$$- \psi_m \cdot 10^6$$

	CaCl <sub>2</sub>	CaBr <sub>2</sub>	SrCl <sub>2</sub>	BaCl <sub>2</sub>	ZnCl <sub>2</sub>	CdBr <sub>2</sub>	K <sub>4</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>
	55,10 55,41 55,24	73,73 73,91	61,75	72,51 72,78	61,39 61,85 60,91 60,49 60,55	86,95 87,06 87,63 87,77 87,12	128,54 131,04 129,83 129,24
Mittelwerte:	55,3	73,8		72,6	61,0	87,3	129,7

Die Meßresultate, welche in Tabellen 3 und 4 angegeben sind, sollen durch einige Messungen, welche zu einem anderen Zweck von T. Birkeland im hiesigen physikalischen Institut ausgeführt wurden, ergänzt werden.

Tabelle 5

$$- \psi_m \cdot 10^6$$

	NaCl	KCl	K <sub>4</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>
	30,44 30,55 30,14 30,72 30,73 30,36 29,83	39,02 39,03 38,97 39,23 39,29 38,72	129,50 130,90 130,98 131,09 130,09 129,65
Mittelwerte:	30,4	39,0	130,4

Vergleicht man die Tabellen 3 und 4 mit Tab. 5, sieht man, daß eine recht gute Übereinstimmung besteht. Ein Vergleich der angegebenen Tabellen gibt auch einen Eindruck von der Genauigkeit der verwendeten Meßmethode. Die Meßfehler der bestimmten Ionsuszeptibilitäten ( $\psi_m$  Mittel) sollen etwa 2—5 Einheiten der letztangegebenen Ziffer nicht übersteigen.

#### Diskussion der Meßresultate

In Tabellen 6 und 7 findet man in der ersten Zeile die untersuchten Verbindungen. Dann folgen in der zweiten und der dritten Zeile Mittelwerte der bestimmten Molekularsuszeptibilitäten der betreffenden Salze in Lösung resp. im festen Zustand<sup>1)</sup>. In der vierten Zeile findet man die Differenz  $\Delta = -10^6 (\psi_{m, \text{Lös.}} - \psi_{m, \text{Kri.}})$ .

1) Die unter  $\psi_{m, \text{Kri.}}$  für NaCl, KCl und K<sub>4</sub>Fe(CN)<sub>6</sub> angegebenen Werte sind Mittelwerte der in den Tabellen 3, 4 und 5 angegebenen Einzelwerte. Der Wert von  $\psi_{m, \text{Lös.}}$  für KJ ist einer Arbeit von Ikenmeyer, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 169. 1929 entnommen.

Tabelle 6

	LiCl	LiBr	NaCl	KF	KCl	KBr	KJ
$-\psi_m, \text{Lös.} \cdot 10^6$ . . . . .	24,2	36,0	30,4	24,1	39,4	50,3	67,8
$-\psi_m, \text{Krist.} \cdot 10^6$ . . . . .	24,3	34,7	30,5	23,0	39,0	49,6	67,1
$\Delta = -10^6(\psi_m, \text{Lös.} - \psi_m, \text{Krist.})$	- 0,1	+ 1,3	- 0,1	+ 1,1	+ 0,4	+ 0,7	+ 0,7

Tabelle 7

	CaCl <sub>2</sub>	CaBr <sub>2</sub>	ZnCl <sub>2</sub>	SrCl <sub>2</sub>	CdBr <sub>2</sub>	BaCl <sub>2</sub>	K <sub>4</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>
$-\psi_m, \text{Lös.} \cdot 10^6$ . . . . .	56,7	78,5	60,1	65,3	92,1	76,3	134,1
$-\psi_m, \text{Krist.} \cdot 10^6$ . . . . .	55,3	73,8	61,0	61,8	87,3	72,6	130,1
$\Delta = -10^6(\psi_m, \text{Lös.} - \psi_m, \text{Krist.})$	+ 1,4	+ 4,7	- 0,9	+ 3,5	+ 4,8	+ 3,7	+ 4,0

Die Molekularsuszeptibilitäten der Salze in Lösung sind mit einer Genauigkeit bestimmt, die ungefähr dieselbe ist wie diejenige, welche für die Molekularsuszeptibilitäten der festen Salze angegeben wurde.

Aus den Tabellen 6 und 7 geht hervor, daß die Differenzen  $-10^6(\psi_m, \text{Lös.} - \psi_m, \text{Fest.})$  bei ein-einwertigen Salzen klein sind. Wenn man KF ausnimmt, liegen die gefundenen Unterschiede innerhalb der Fehlergrenzen. Diese sind schätzungsweise maximal etwa  $\pm 0,7$ . Aus den Tabellen geht ferner hervor, daß die Differenzen  $-10^6(\psi_m, \text{Lös.} - \psi_m, \text{Krist.})$  bei den untersuchten zwei-einwertigen Salzen in der Regel merkbar größer sind als bei den einwertigen Salzen. Die Suszeptibilitätsmessungen an dem ein-vierwertigen Salz  $\text{K}_4\text{Fe(CN)}_6$  bestätigt ebenfalls diese Regel.  $\text{ZnCl}_2$  weicht jedoch von dieser Regel ab. Es ist auch bemerkenswert, daß in den meisten Fällen der Diamagnetismus der Salze in Lösung größer ist als im festen Zustande. Insofern wird durch unsere Messungen das von Hocart gefundene Resultat bestätigt. Es zeigt sich also, daß die diamagnetischen Eigenschaften der Ionen strenggenommen nicht additiv sind.

Nach P. Weiß<sup>1)</sup> werden diese experimentellen Ergebnisse theoretisch begründet, indem man der polarisierenden Wirkung der Ionen aufeinander im Kristallgitter und der polarisierenden Wirkung der Ionen auf die Moleküle des Lösungsmittels Rechnung trägt. Diese beiden Einflüsse sollen eine Herabsetzung der diamagnetischen Wirkung einer Verbindung bedingen und zwar soll die Herabsetzung im Kristallgitter größer sein als in Lösung.

1) P. Weiß: Sur le diamagnétisme des Ions: Journ. de phys. et le Radium Tome I, Serie VII. S. 185. 1930.

## Zusammenfassung

1. Es wurden die Molekularsuszeptibilitäten der in Tabellen 6 und 7 angegebenen Salze in kristallinischem Zustande und in wäßriger Lösung gemessen.

2. Aus Tabellen 6 und 7 sieht man, daß  $-\psi_{m, \text{Lös.}}$  durchweg größer ist als  $-\psi_{m, \text{Krist.}}$ . Wenn man von zwei Fällen absieht, liegen die Unterschiede  $-10^6 \cdot (\psi_{m, \text{Lös.}} - \psi_{m, \text{Krist.}})$  bei den gemessenen einwertigen Salzen innerhalb der Fehlergrenze. Bei der zweiwertigen Salzen und  $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$  liegen die gefundenen Unterschiede  $-10^6 (\psi_{m, \text{Lös.}} - \psi_{m, \text{Krist.}})$  außerhalb der Fehlergrenzen. Eine Ausnahme bildet jedoch  $\text{ZnCl}_2$ . Bei  $\text{CaBr}_2$  ist  $-10^6 (\psi_{m, \text{Lös.}} - \psi_{m, \text{Krist.}})$  größer als  $6\%$ .

3. Diese Resultate zeigen, daß die magnetischen Eigenschaften diamagnetischer Verbindungen strenggenommen nicht additiv sind. Magnetische Messungen von diamagnetischen Verbindungen in verschiedenen Lösungsmitteln führen zu derselben Schlußfolgerung (vgl. vorstehende Notiz).

Diese Untersuchung wurde mit Unterstützung des „Statens videnskapelige Forskningsfond“ und des „Nansensfond“ durchgeführt. Den Verwaltern dieser Stiftungen möchten wir hier für die bewilligte Unterstützung unseren ergebensten Dank aussprechen.

Oslo, Physikalisches Institut der Universität, Juni 1935.

(Eingegangen 20. Juni 1935)

## ***Ein Interferenzlichtrelais für weißes Licht***

**Von H. J. Pabst von Ohain**

(Mit 7 Figuren)

### **§ 1. Fragestellung**

Die Umwandlung periodischer Druckschwankungen in Lichtschwankungen ist eine technisch in vielen Fällen wichtige Aufgabe (z. B. Tonfilm). Man löst sie bisher in zwei Schritten: zunächst stellt man mit Hilfe eines der bekannten Mikrophone elektrische Stromschwankungen her und mit diesen betätigt man unter Zwischenschaltung von Verstärkern irgendwelche Lichtsteuergeräte (beispielsweise Kerrzelle oder Oszillographen). Diese bisherigen Verfahren haben zwei Nachteile:

1. erfordern sie einen erheblichen Aufwand von Verstärkereinrichtungen,
2. zeigen sie störende Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Frequenz.

Die vorliegende Arbeit versucht, die elektrischen Zwischenglieder auszuschalten und Druckschwankungen direkt in Lichtschwankungen umzuwandeln. Das gelingt durch den Bau eines einfachen, lichtstarken Interferenzrelais für weißes, konvergentes Licht. Es wird in § 2 beschrieben. Die folgenden Paragraphen bringen die experimentelle Untersuchung seiner Eigenschaften. Die erzielten Ergebnisse sind in § 7 zusammengestellt.

### **§ 2. Beschreibung des Lichtrelais**

Das Lichtrelais ist vom optischen Standpunkt aus betrachtet ein Interferometer mit ganz symmetrischem Strahlengang. Dieser wird durch Fig. 1 erläutert. Zur Herstellung beider kohärenter Wellenzüge wird das einfallende Lichtbündel *E* an der halbdurchlässig verspiegelten Glasplatte *II* bei *e* in zwei Teilbündel gleicher Intensität aufgespalten. Die Wiedervereinigung beider Bündel erfolgt bei *a*. Das austretende Lichtbündel *A* wird für Meßzwecke auf eine Photozelle geworfen.

Bei der völligen Symmetrie beider Lichtwege kann man leicht auf eine Interferenz nullter Ordnung einstellen und die Anordnung dadurch auch für weißes Licht brauchbar machen. Man wählt für die

Ruhelage der Platte *III* nicht den Gangunterschied Null, sondern die mittlere Helligkeit beim Übergang vom schwarzen Fleck zum ersten Helligkeitsmaximum. Verschiebungen des hinteren Spiegels in Richtung des Doppelpfeiles ändern den Gangunterschied beider Büschel und bewirken hierdurch eine Änderung der Lichtintensität. Die Schwankungen der Lichtintensität sind den Spiegelverschiebungen proportional. Diese dürfen jedoch einen Wert von etwa  $\pm \frac{\lambda}{10}$  nicht überschreiten. Das wird durch Messungen in § 3 belegt.

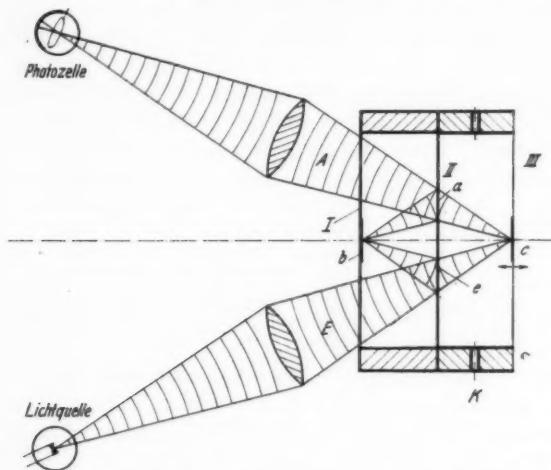


Fig. 1. Schematische Darstellung der Wirkungsweise des Interferenzlichtrelais

Die Art der Spiegelverschiebung ist für den optischen Ablauf der Erscheinung vollständig gleichgültig. Der Spiegel kann durch beliebige mechanische oder elektrische Kräfte bewegt werden.

Die weitere Darstellung soll sich jedoch auf einen Sonderfall beschränken. Der Spiegel *c* soll zusammen mit seinem plattenförmigen Träger durch Schallschwingungen gesteuert werden und dabei in dem großen Frequenzintervall von  $10^1 - 10^4 \text{ sec}^{-1}$  vollständig frequenzunabhängig arbeiten. Oder anders ausgedrückt: das Interferometer soll im Verein mit einer Photozelle (Fig. 1) ein von Selektivitäten freies Mikrophon darstellen. Die Anpassung des Interferometers an diesen Sonderzweck geschieht durch zwei Maßnahmen:

1. als Spiegelträger wird eine dünne auf Zaponlackhäutchen aufgedampfte Silberfolie von 1 cm Durchmesser und  $10^{-5}$  cm Dicke

verwandt. Masse und Stabilität der Zaponlackhaut sind dabei gegenüber der Silberfolie zu vernachlässigen.

2. der Raum zwischen den Platten *II* und *III* wird zu einem Luftpolster von etwa 2,5 mm Dicke ausgestaltet und durch enge Kanäle *k* mit der Außenluft verbunden. Diese dienen dem Druckausgleich bei langsamen Druckschwankungen und außerdem zur Dämpfung der Membranschwingungen. Die Fig. 2 gibt einen Schnitt durch einen technischen Apparat mit Maßangaben. Die empfindliche Membran wird mit einem Drahtsieb geschützt.

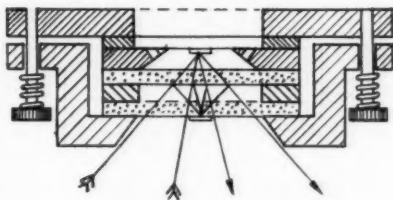


Fig. 2. Technische Ausführung des Interferenzlichtrelais in 2 fach natürlicher Größe

Die guten Mikrophoneigenschaften dieser Sonderausführung, insbesondere die Einflußlosigkeit von der Frequenz wird in § 4 durch Messung belegt.

### § 3. Proportionalität von Lichtintensität und Verschiebung des Interferometerspiegels *c*

In Fig. 1 werde der Spiegel *c* in Richtung des Doppelpfeiles um den Weg  $dh$  verschoben. Dann hat das einfallende Lichtbündel einen um  $dl$  größeren Lichtweg zurückzulegen als das andere Bündel.

$$(1) \quad dl = 2 \frac{dh}{\cos \alpha}.$$

Dabei ist  $\alpha$  der Einfallswinkel der Lichtbündelachse. Die mechanische Messung von Spiegelverschiebungen mit Höchstwert von  $10^{-5}$  cm ist schwierig. Daher wurde der Lichtweg nicht mechanisch durch eine Spiegelverschiebung geändert, sondern durch eine Änderung des Gasdruckes in der Kammer zwischen den Platten *I* und *II*. So gelangt man zu der in Fig. 3 skizzierten Anordnung. Für die Differenz der Lichtwege bei einer Änderung des Gasdruckes  $dp$  gilt:

$$(2) \quad dl = \frac{2h}{\cos \alpha} dn; \quad dn = \frac{dp}{p} \frac{1}{2} (n^2 - 1); \quad dl = \frac{dp}{p} h \frac{n^2 - 1}{\cos \alpha}$$

$n$  = Brechungsindex der Luft 1,0003.

Der benutzte Überdruck  $dp$  lag zwischen  $\pm 0,1$  Atm., war also bequem meßbar. Die Fig. 4 zeigt eine typische Meßreihe. Die Ordinate ist die an der Vakuumphotozelle abgelesene Stromstärke. Die obere der beiden Abszissen enthält die am Manometer



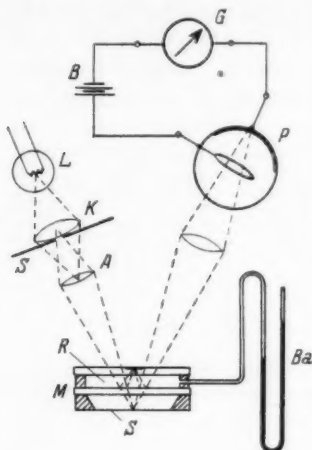


Fig. 3. Die Abhängigkeit der Gesichtsfeldaufhellung vom Gangunterschied.

Der Gangunterschied wird nicht durch Ausbeulung der Membran *S*, sondern durch Änderung des Luftdruckes in der Kammer *R* hervorgerufen

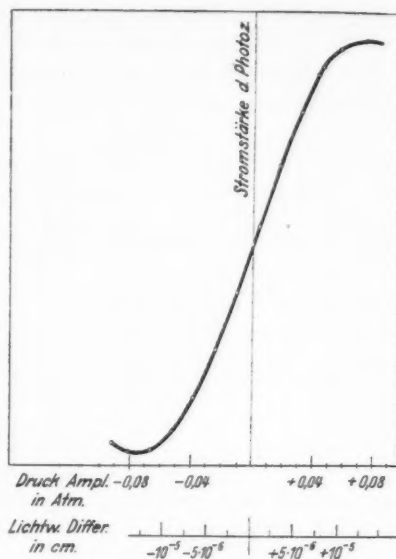


Fig. 4

Unterschrift zu Fig. 4:

Die Aufhellung des Gesichtsfeldes, gemessen durch die Stromstärke der Photozelle, in ihrer Abhängigkeit vom Gangunterschied beider interferierender Wellenzüge

Unterschrift zu Fig. 5:

*JL* = Charakteristik des Interferenzlichtrelais (Abszisse: Amplitude der Membranausschläge). *K* = Charakteristik der Kerrzelle (Abszisse: Amplitude der Spannungsschwankungen)

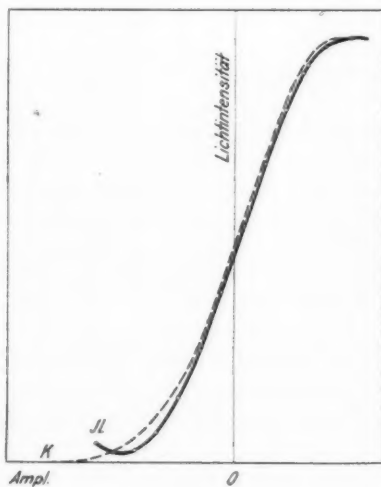


Fig. 5

abgelesenen Druckschwankungen, die untere die nach Formel (2) berechneten Differenzen der Lichtwege in Zentimetern.

Die Lichtintensität ist also den Lichtwegdifferenzen bis zu Beträgen von  $\pm 8,8 \cdot 10^{-6}$  cm mit guter Annäherung proportional. Dabei hat das Verhältnis der maximalen Lichtintensität zur minimalen (technisch: die maximale Aussteuerung) einen Wert von 10:1. Das entspricht einer Verschiebung des Spiegels mit einer Amplitude von  $\pm 4,4 \cdot 10^{-6}$  cm. Dieser Höchstwert begrenzt die Proportionalität des Interferometers.

Bisher hat man zur Steuerung von Lichtintensitäten ganz überwiegend die Kerrzelle benutzt. Sie erreicht jedoch bei der gleichen Aussteuerung 10:1 hinsichtlich der Proportionalität zwischen Amplitude und Lichtintensität nicht ganz die Leistungen des Lichtrelais. Das zeigt der graphische Vergleich in Fig. 5.

#### § 4. Das Lichtrelais bei verschiedenen Frequenzen

Die Frage lautet: wie ändert sich die Lichtintensität, wenn die Membran des Lichtrelais mit einer periodischen Kraft konstanter Amplitude und variabler Frequenz erregt wird?

Zur Herstellung der konstanten periodischen Kraft diene eine elektrische Wechselspannung konstanter und nach Bedarf meßbar veränderlicher Amplitude. Sie erregte die Membran *M* (Fig. 7b) durch statische Kräfte nach Art eines Kondensatormikrophons. Der Wechselstromgenerator war eine Lichtsirene, sie wird in § 5 und Fig. 7 a, c näher erläutert werden.

Die Messung der Lichtintensität sinusförmig pulsierender Lichtschwankungen bis zu Frequenzen von  $10^4 \text{ sec}^{-1}$  ist schwierig. Man müßte den pulsierenden Photozellenstrom von etwa  $10^{-6}$  Amp. mit einem Oszillographen registrieren und dieser dürfte seinerseits im ganzen Frequenzbereich keine Frequenzabhängigkeit aufweisen. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch durch einen Kunstgriff<sup>1)</sup> umgehen. Man justiert den Apparat bei der Ruhelage der Membran auf den schwarzen Fleck, also nicht wie bei normaler Benutzung auf mittlere Helligkeit. Jetzt bewirken Änderungen der Membranelage einen zeitlichen Mittelwert der Aufhellung, der mit wachsender Amplitude zunimmt. Der zeitliche Mittelwert der Aufhellung ist bequem mit Photozelle und Galvanometer meßbar. Er wächst anfangs nicht linear mit der Amplitude, doch folgt dann ein weiterer linearer Bereich, und in diesem wird die Frequenzabhängigkeit untersucht. Der lineare Bereich wird in einem Vorversuch experimentell

1) C. Müller, Ztschr. f. techn. Phys. 13. S. 177. 1932.

für eine mittlere Frequenz, beispielsweise  $100 \text{ sec}^{-1}$ , herausgesucht. Zu diesem Zweck werden von der Spannung der Lichtsirene mit dem Spannungsteiler  $W$  bekannte Bruchteile abgegriffen. Bei bestimmter Spannungsamplitude erweist sich der Differenzenquotient  $C = \frac{\Delta A}{\Delta S}$  zwischen Spannung und Skalenteil konstant. Seine Größe wird gemessen, man findet beispielsweise  $C = 1$ . Hierbei bedeutet  $\Delta A$  Amplitudenzuwachs der Spannungsamplituden,  $\Delta S$  Zuwachs der Skalenteile. Nach dieser Einstellung einer Spannungs- bzw. Membran-

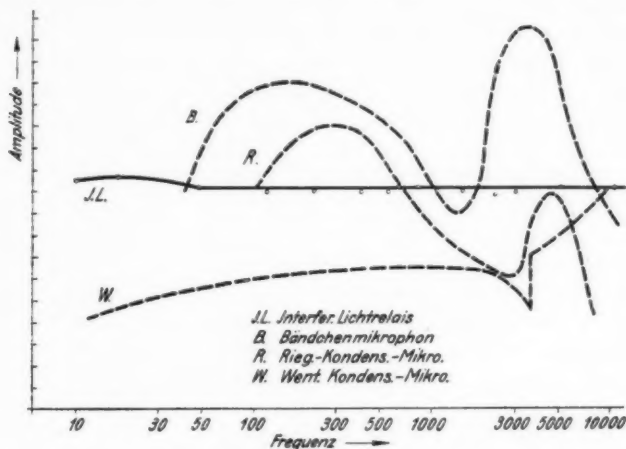


Fig. 6. Frequenzgang des Interferenzlichtrelais und verschiedener hochwertiger Mikrophone

amplitude folgt dann die eigentliche Untersuchung der Frequenzabhängigkeit.

Man läßt die einmal eingestellte Amplitude ungeändert und variiert die Frequenz von  $10^1$ — $10^4 \text{ sec}^{-1}$ . Währenddessen beobachtet man die Verschiebung  $\Delta S$  des Lichtzeigers auf der Galvanometerskala. Das Produkt  $C \cdot \Delta S_{(v)}$  stellt die Amplitudenvergrößerung bzw. -Verkleinerung als Funktion der Frequenz dar. Addiert man hierzu noch den Wert von  $A$ , so erhält man die wiedergegebene Amplitude  $A + C \Delta S_{(v)}$  als Funktion der Frequenz. Diese wird graphisch in Fig. 6 durch die ausgezogene, praktische horizontale Linie wiedergegeben. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist also nahezu von der Frequenz unabhängig. Die Abweichung von dem konstanten Mittelwert beträgt nur wenige Prozent ( $\pm 4\%$ ).

Es fehlen also alle störenden Selektivitäten. Zum Vergleich sind in Fig. 6 die entsprechenden Kurven für drei verschiedene hochwertige Mikrophone angegeben.

Gegen die Art des hier angegebenen Meßverfahrens können verschiedene Einwände erhoben werden. Deshalb muß zunächst die Versuchsanordnung eingehend beschrieben werden, und im Anschluß daran müssen die Einwände erörtert werden.

### § 5. Beschreibung der benutzten Versuchsanordnung

In Fig. 7a ist die Lichtsirene dargestellt, in Fig. 7b das Lichtrelais mit der vorgeschalteten Hilfsmembran *M*.

Die Sirene besteht aus einer Zellscheibe *C* (Fig. 7c) von 16 cm Durchmesser. Sie war am Rande in 48 gleiche Sektoren

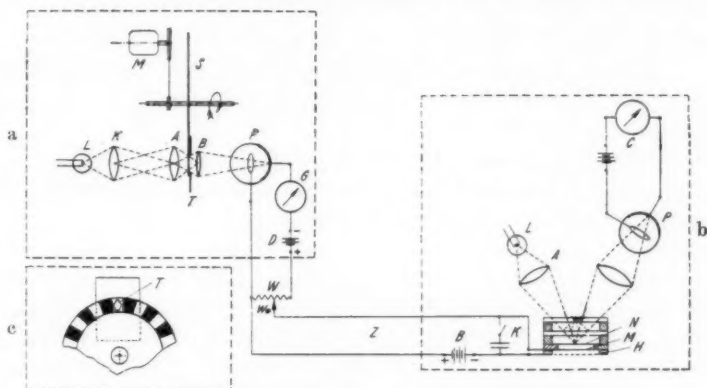


Fig. 7. Anordnung zur Untersuchung des Frequenzganges des Interferenzlichtrelais.

Fig. 7a. Herstellung sinusförmiger Spannungsschwankungen konstanter Amplitude und variabler Frequenz mittels einer Lichtsirene. — Fig. 7b. Die Druckschwankungen vor der Spiegelmembran *N* werden mit Hilfe eines vorgeschalteten Kondensatortelefons *H*; *M*; erzeugt. — Fig. 7c. Die Sektorscheibe der Lichtsirene vor der Spaltblende *T*

geteilt, jeder zweite von ihnen war mit Stanniol abgedeckt. Diese Sektoren rotierten vor dem Blendschirm *T* mit der aus Fig. 7c ersichtlichen Öffnung von der Gestalt zweier aufeinander stehender Sinuskurven. Die von den Stanniolsektoren freigegebene Öffnung *F* als Funktion des Drehwinkels  $\varphi$  ergibt:

$$F = F_{\max} \left( 1 - \int_0^{r \cdot \varphi} \sin x \, dx \right) = F_{\max} \cos (r \cdot \varphi).$$

Das durchgelassene Licht hat also genau sinusförmigen Intensitätswechsel. Die Lichtquelle  $L$  wird mit einem aplanatischen Kondensor  $K$  im Abbildungsobjektiv  $A$  abgebildet. Der Kondensor selbst wird auf dem Blendschirm so abgebildet, daß die Öffnung  $T$  vollständig ausgeleuchtet wird. Die Linse  $B$  sitzt unmittelbar hinter dem Schirm und bildet die Wendel  $L$  in der Photozelle ab. Auf diese Weise bleibt die Lage und Lichtverteilung des Wendelbildes auf der Photozelle ungeändert. So werden Oberschwingungen infolge lokaler Unterschiede der Schichtempfindlichkeit vermieden. Der Photozellenstrom wird durch den induktionsfreien Widerstand  $W$  ( $= 4 \cdot 10^5$  Ohm) geleitet. Vom Spannungsteiler  $W$  kann man maximale Spannungsschwankungen bis zu  $\pm 40$  Volt abgreifen. Die abgegriffenen Spannungsschwankungen sollen bei allen Frequenzen dem Widerstand  $W^*$  proportional sein. Das ist an zwei Voraussetzungen gebunden:

1. Muß der Photozellenstrom (etwa  $2 \cdot 10^{-4}$  Amp.) bei allen Frequenzen gleich sein. (Das wurde mit dem Strommesser  $G$  nachgeprüft.)

2. Muß der Verschiebungsstrom im Kondensator des Mikrophons (Fig. 7c) klein gegenüber dem Photozellenstrom sein, sonst würde die Stromverzweigung eine Herabsetzung der Spannungsschwankungen ergeben.

Tatsächlich erreicht der Verschiebungsstrom etwa 16% des Photozellenstromes. Glücklicherweise ist aber der Verschiebungsstrom gegenüber den Spannungsschwankungen um  $90^\circ$  verschoben. Daher sind die Verluste von zweiter Ordnung. Zur Nachprüfung dieser Behauptung wurde der Verschiebungsstrom während der Messung durch Parallelschaltung des Kondensators  $K$  (Fig. 7b) auf den 2—3fachen Wert gebracht. Hierbei trat keine merkliche Änderung der Meßresultate ein. — Soweit die Herstellung der frequenzunabhängigen Spannungsschwankungen.

Mit diesen Spannungsschwankungen soll jetzt die Hilfsmembran  $M$  zu frequenzunabhängigen Sinusschwingungen angeregt werden. Zu diesem Zweck wurde die Leitung  $Z$  mit der Hilfsmembran und dem Drahtsieb verbunden unter Zwischenschaltung einer Gleichspannung von 250 Volt. Dann gilt für die periodischen elektrostatischen Kräfte zwischen dem Drahtsieb und der Hilfsmembran

$$(3) \quad dK = dV \varepsilon \frac{2VF}{d^2};$$

$F$  Membranfläche,  $d$  Abstand zwischen Drahtsieb und Hilfsmembran,  $V$  Gleichspannung 250 Volt,  $dV$  Spannungsschwankung.

Es besteht also Proportionalität zwischen angelegter Spannungsschwankung und der Kraft zwischen dem Drahtsieb und der Hilfsmembran. Damit ist eine wesentliche Voraussetzung des in § 4 benutzten Meßverfahrens erfüllt.

Nun ist noch zu zeigen, daß die von der Hilfsmembran  $M$  vor der Spiegelmembran  $N$  erzeugten Druckschwankungen den elektrostatischen Kräften proportional sind. Hierfür müssen zunächst die Eigenfrequenzen beider Membranen berechnet werden.

Mit der adiabatischen Zustandsgleichung ergibt sich für die Richtkraft  $D$  pro  $\text{cm}^2$  der Membran:

$$(4) \quad D = \frac{dp}{dh} = p_0 \gamma \frac{dV}{dV} = p_0 \gamma \frac{F}{V};$$

$\gamma$  Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $V$  Volumen des Luftpolsters,  $p_0$  Atmosphärendruck,  $F$  Fläche der Membran.

Die Masse der Membran pro  $\text{cm}^2$  beträgt  $10^{-8}$  kg Masse. Die Größen für die Membranen  $N$  und  $M$  sind:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1,27 \text{ cm}^2, & V_1 &= 0,26 \text{ cm}^3, \\ F_2 &= 0,8 \text{ cm}^2, & V_2 &= 0,2 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Setzt man obige Werte in die Gl. (4) ein, so ergibt sich für die Eigenfrequenz nach der Formel

$$\nu_E = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad 3 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$$

für beide Membranen.

Die Eigenfrequenzen beider Membranen liegen also weit oberhalb des akustisch bedeutsamen Frequenzbereiches.

Ferner ist die Membran  $M$  wegen ihres kleinen Durchmessers und der großen Richtkraft ein sehr schlechter Schallstrahler. Die Druckamplituden der abgestrahlten Schallwellen sind also klein gegenüber den Druckschwankungen, die vor der Membran  $N$  erzeugt werden. Daher darf man die frequenzabhängige Strahlungsdämpfung vernachlässigen. Auf Grund dieser beiden Tatsachen (Eigenfrequenz  $\nu_E > 3 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$  und geringe Strahlungsdämpfung) darf man die Druckschwankungen vor der Membran  $N$  den periodischen elektrostatischen Kräften proportional setzen.

#### § 6. Theoretische Grundlagen der Frequenzunabhängigkeit

Die Frequenzunabhängigkeit des Lichtrelais ist bisher nur als experimentelle Tatsache dargestellt worden. Sie beruht auf Form und Anordnung der Spiegelmembran und des von ihr begrenzten Luftpolsters. Diese Größen sind auf Grund folgender Überlegungen gefunden worden. Das Relais sollte bei Aufnahme von Sprache und Musik periodische Druckamplituden bis zu

etwa  $3 \cdot 10^{-5}$  kg Kraft/cm<sup>2</sup> verzerrungsfrei wiedergeben. Bei diesen Höchstwerten der Druckamplituden sollten die Amplituden der Spiegelmembran nicht über  $0,44 \cdot 10^{-5}$  cm hinausgehen. Andernfalls würde man aus optischen Gründen zu nichtlinearen Verzerrungen (vgl. Fig. 3) gelangen. Unterhalb dieser Höchstamplitude sollte nun bei allen Frequenzen das Verhältnis von Druckamplitude/Membran-amplitude konstant sein. Zur Lösung dieser Aufgabe wurde die Membran als Bewegungsempfänger dicht vor einer schallhart reflektierenden Wand [der Glasplatte II (Fig. 1)] im Abstände  $a = 2,5$  mm angeordnet. Dabei ist das von der Membran und der schallharten Wand gebildete Luftpolster im ganzen Frequenzbereich klein gegenüber der Wellenlänge des Schalles. Die Eigenfrequenz des Luftpolsters ist also groß gegenüber der Frequenz der abzubildenden Schallwellen. Sie liegt oberhalb 30000 Schwingungen/Sek. [vgl. oben]. Das Luftpolster fällt also vollkommen in die Druckmaxima bzw. -minima des Schallfeldes. Infolgedessen führen die Luftteilchen ohne das Vorhandensein der Membran im Abstände  $a$  vor der schallharten Wand Bewegungen aus, die frequenzunabhängig den Druckamplituden proportional sind. Für die Bewegungsamplituden  $dh$  ergibt sich:

$$dh = dp \frac{\gamma}{F}; \quad \frac{F}{V} = \frac{1}{a}; \quad \text{also: } dh = dp \cdot \gamma \cdot a;$$

$F$  Membranfläche,  $V$  Volumen des Luftpolsters,  $dp$  Druckamplitude,  $a$  Abstand der Membran von der Glasplatte II.

Die Bewegungsamplituden sind also unabhängig von der Frequenz den Druckamplituden proportional, falls  $a$  klein gegenüber der Wellenlänge des Schalles bleibt.

Die Amplitude der Membran kann mit der der Luftteilchen übereinstimmen. Es muß nur eine Bedingung erfüllt sein: die von der Elastizität der Membran und von der Trägheit ihrer Masse herrührenden Kräfte müssen klein sein gegen die Kräfte, die vom Druck der Schallwellen auf das Luftpolster ausgeübt werden. Diese Bedingungen werden durch die Abmessungen der Membran erfüllt. Ihre Masse je Quadratzentimeter beträgt nur  $m = 10^{-8}$  kg Masse, ihre Richtkraft beträgt etwa 7% der Richtkraft des Luftpolsters. Dieser Wert wurde experimentell durch eine statische Methode ermittelt. Für die Trägheitskräfte  $P$  der Membran je Quadratzentimeter gilt:

$$P = m \omega^2 dh; \quad dh = dp \frac{1}{D};$$

$$\text{also: } \frac{P}{dp} = \frac{m \omega^2}{D} = \frac{3,9}{60} \quad \text{für } \omega = 2\pi\nu; \nu = 10^4 \text{ sec}^{-1}.$$



Die Kraft je Quadratcentimeter der Membran auf Grund der Trägheit ihrer Masse beträgt also bei  $10^4 \text{ sec}^{-1}$  nur etwa 6% der Druckkraft des Luftpolsters.

#### § 7. Zusammenfassung

Die Arbeit beschreibt und untersucht ein lichtstarkes Interferenzrelais für konvergentes, weißes Licht. Es soll besonders als optisches Mikrophon und elektrisches Lichtsteuergerät verwendet werden. Seine maximale Aussteuerung beträgt 10:1. Es arbeitet im Frequenzbereich von  $10^1$ — $10^4 \text{ sec}^{-1}$  ohne jede Selektivitäten.

Bei normaler Besprechung ergeben sich in Verbindung mit einer Photozelle Wattschwankungen von etwa  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  Watt gegenüber etwa  $10^{-9}$  Watt der bekannten hochwertigen Mikrophone.

Herrn Professor Pohl möchte ich für die dauernde Förderung und sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit herzlichst danken.

Göttingen, I. Physikal. Institut der Universität, Februar 1935.

(Eingegangen 21. Juni 1935)

## **Ein Beitrag zur magnetischen Nachwirkung**

**Von Heinz Wittke**

(Mit 5 Figuren)

Magnetische Nachwirkung ist zuerst von Ewing<sup>1)</sup>, dann von Lord Rayleigh<sup>2)</sup> bei seiner klassischen Untersuchung des Verhaltens ferromagnetischer Stoffe in kleinen Feldern beobachtet worden. Ewing<sup>3)</sup> unterzog sie darauf einer genaueren Nachprüfung auf ihr zeitliches Verhalten hin in einer späteren Arbeit. Er entdeckte, daß beim Magnetisieren durch kleine, sehr rasch ablaufende Feldänderungen die Induktion  $B$  langsam in ihren jeweiligen Endwert  $B_\infty$  hineinkriecht. Magnetisiert man in kleinen, aufeinanderfolgenden Schritten, so zeigt jeder Schritt für sich dieses Phänomen.

Die Endwerte  $B_\infty$  bilden eine stetige Kurve, die im folgenden als „quasistatisch“ bezeichnet werden soll, während die Momentanwerte  $B$  auf einer „dynamischen“ Kurve liegen. Bei den jüngeren Arbeiten lassen sich nun zwei Gruppen unterscheiden.

Die eine untersucht, Ewing folgend, die Nachwirkung direkt an Schaltvorgängen mit Hilfe des Pendelunterbrechers oder automatisch wirkender Schalter, um aus den Abweichungen gegenüber den berechneten Wirbelstromeinflüssen Schlüsse über die Nachwirkung zu ziehen.

Hierher gehören die Arbeiten von Gildemeister, Wwedensky u. a.<sup>4)</sup>

Alle diese Arbeiten kamen jedoch zu nicht eindeutigen oder sogar widersprechenden Ergebnissen, weil stets nur der allererste Teil der  $B, t$ -Kurve untersucht worden ist bis auf etwa  $\frac{1}{10}$  des Anfangswertes von  $B$ . Wenn diese Methode auch den Nachwirkungsvorgang direkt aufzeigt, hat sie doch den Nachteil, die technisch besonders interessierenden Verluste erst auf dem Umwege über die zeichnerische oder rechnerische Konstruktion der  $B, H$ -Schleife aus der beobachteten  $B, t$ -Kurve zu liefern.

1) J. A. Ewing, Phil. Trans., 1885. S. 569.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. [5] 23. S. 225. 1887.

3) J. A. Ewing, Proc. Roy. Soc., Juni 1889.

4) M. Gildemeister, Ann. d. Phys. [4] 23. S. 401. 1907; B. Wwedensky, Ann. d. Phys. [4] 66. S. 110. 1921; R. M. Bozorth, Phys. Rev. 32. S. 124. 1928; G. Kiessling, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 402. 1935.

Die andere Gruppe ermittelt den Flächeninhalt der dynamisch durchlaufenen  $B, H$ -Schleifen durch Verlustwiderstandsmessungen in einer Brückenordnung nach dem Vorgange von M. Wien<sup>1)</sup>. Dieser von Jordan<sup>2)</sup> verbesserten Methode haftet ihrerseits der Mangel an, daß sie nur über die Energieverhältnisse, allerdings mit einer auf keine andere bekannte Weise erreichbaren Genauigkeit Auskunft gibt. Sie stellt fest, wie die Verluste vom Felde und von der Frequenz abhängen. Darüber hinaus ist auch in weiteren Untersuchungen<sup>3)</sup> das Verhalten der Oberschwingungen analysiert worden.

Darüber muß man sich allerdings, wenn man den Begriff Nachwirkung einführt, klar sein, daß man darunter zunächst einmal ganz naiv mit Ewing die Tatsache zu verstehen hat, daß die Induktion  $B$  zeitlich sich noch merklich verändert, wenn das Feld  $H$  praktisch schon konstant geworden ist. Messungen an periodischen Vorgängen können diese Frage *direkt* überhaupt nicht entscheiden, wenn sie auch, nachdem man die Existenz der Nachwirkung auf andere Weise sichergestellt hat, zur Klärung ihres Verhaltens weitestgehend beizutragen vermögen.

Die Frage, ob es sich bei den von Jordan aufgefundenen Zusatzverlusten um Nachwirkung oder nur um einen weiteren Hysteresisverlust handelt, ist a priori unentschieden; allerdings ist kürzlich durch direktes Ausmessen der quasistatischen im Vergleich zu dynamisch durchlaufenen Schleifen für kleine Felder von Wittke<sup>4)</sup>, für große von E. A. Neumann<sup>5)</sup> bewiesen worden, daß diese größeren Flächeninhalt haben als die quasistatischen. v. Auwers<sup>6)</sup> betrachtet dieses Ergebnis als den ersten wirklichen Nachweis des Vorhandenseins der Nachwirkung, doch kann auch dieser Nachweis höchstens als indirekt angesehen werden.

#### Das Ziel der vorliegenden Arbeit

Ist es nun gewesen, nach der zuerst angeführten Methode Schaltvorgänge mit Hilfe eines Pendelunterbrechers ballistisch in ihrem zeit-

1) M. Wien, Ann. d. Phys. [3] **66**. S. 859. 1898.

2) H. Jordan, El. Nachrichtentechnik **1**. S. 7. 1924; vgl. auch R. Goldschmidt, Ztschr. f. techn. Phys. **13**. S. 534. 1932; **11**. S. 8. 1930; H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] **18**. S. 679. 1933; P. C. Hermann, Ztschr. f. Phys. **84**. S. 565. 1933.

3) W. J. Shakerlton u. J. G. Barber. Diese Arbeit ist mir leider nicht zugänglich; beim Zitieren der beiden nordamerikanischen Autoren ist Herrn Jordan wohl ein Versehen unterlaufen.

4) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] **20**. S. 106. 1934.

5) E. A. Neumann, Ztschr. f. Phys. **83**. S. 619. 1933.

6) v. Auwers, Gmelins Handbuch der anorg. Chemie (8. Aufl.). Nr. 59. S. 1502. Fußnote.

lichen Verlauf so weit zu verfolgen, bis die Differenz  $\eta = B - B_\infty$  Werte unter  $1/100$  ihres Anfangswertes angenommen hat. Dazu diente folgende

### Versuchsanordnung,

deren Aufbau im wesentlichen Fig. 1 zeigt. An der Außenbatterie  $E_a$  lagen der induktionsfreie Widerstand  $R_1$  und die Innenbatterie mit

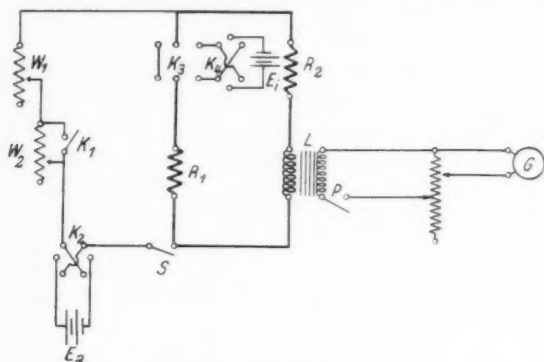


Fig. 1. Schaltschema

der Spannung  $E_i$  und parallel dazu die — zur Erhöhung der Empfindlichkeit — beiden gleichen Ringspulen mit der Gesamtinduktivität  $L$ , deren Kerne die zu untersuchenden Werkstoffe in Drahtform bildeten. Diese Ringspulen waren dieselben wie die in den früheren Arbeiten<sup>1)</sup> benutzten, wo auch ihre Abmessungen und anderen Daten zu finden sind. Leider haben sich im Laufe der Zeit ihre Anfangspermeabilitäten etwas erhöht.

Ihr Eigenwiderstand und ein Zusatzwiderstand sind in  $R_2$  vereinigt gedacht. Zur Messung wurden  $S$  und  $P$  durch den Pendelunterbrecher um eine meßbare Zeit  $t$  nacheinander betätigt. Nach Öffnung von  $S$  zur Zeit  $t = 0$  blieb also der Meßkreis in sich geschlossen. Man hat dadurch wohl definierte Verhältnisse nach der bekannten Gleichung

$$N \cdot q \cdot 10^{-8} \cdot \dot{B} + i(R_1 + R_2) = E_i,$$

woraus durch Multiplikation mit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{0,4 \pi N}{l \cdot (R_1 + R_2)}$$

( $N$  die gesamte primäre Windungszahl der beiden Ringe,  $q$  Quer-

1) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 679. 1933.

schnitt des einzelnen Ringes,  $l$  sein mittlerer Umfang), die Beziehung folgt

$$(1a) \quad k \dot{B} + H = H_{\infty}.$$

Zur Abkürzung ist  $k = \frac{L_0}{R_1 + R_2}$  gesetzt, dabei ist  $L_0$  die geometrische Selbstinduktion beider Ringe, ohne Eisenfüllung gedacht. Im  $\xi, \eta$ -System der Fig. 2 heißt die Gleichung also

$$(1) \quad \begin{cases} \text{mit} \\ \xi = H - H_{\infty} \quad \text{und} \quad \eta = B - B_{\infty}. \end{cases} \quad k \dot{\eta} + \xi = 0$$

Für zentrierte Schleifen soll  $\xi_0 = h$  und  $\eta_0 = b$  genannt werden. Das zur Zeit  $t$  durch Schließung des Schalters  $P$  angelegte Galvanometer maß die jeweilige Differenz  $\eta$  der Induktion  $B$  gegen ihren Endwert  $B_{\infty}$ .

Wurde die Spannung  $E_i$  doppelt so hoch wie  $E_a$  gewählt, wenn  $R_1 = R_2$  war, so durchlief  $\eta$  den absteigenden Ast einer  $B, H$ -Schleife zwischen

$$-\frac{h}{2} \leq H \leq +\frac{h}{2}.$$

Bei anderer Wahl der Spannungen konnte man jedes beliebige Stück eines solchen Astes messend durchlaufen, während die Betätigung der Schalter  $K_1, K_2, K_3, K_4$  über die Vorwiderstände  $W_1$  und  $W_2$  es gestattete, die anderen Teile der Schleife leer zurück-

zulegen, um wieder an den gleichen Anfangspunkt  $\eta_0$  für die nächste Messung zu gelangen. Das Galvanometer  $G$  war mit einem auswechselbaren Shunt versehen, der es gestattete, bei gleichbleibender Dämpfung schrittweise das Instrument mit dem Kleinerwerden von  $\eta$  empfindlicher zu machen. Gewöhnlich geschah das im Verlauf einer Kurvenaufnahme zwei- bis dreimal, wobei die Meßbereiche sich in zwei Meßpunkten überdeckten, wie das aus dem abgedruckten Beispiel eines Meßprotokolls zu ersehen sein wird.

Die einzige Schwierigkeit bot der Schalter  $P$ ; denn erfahrungsgemäß kann man durch einen Pendelunterbrecher Kontakte nur

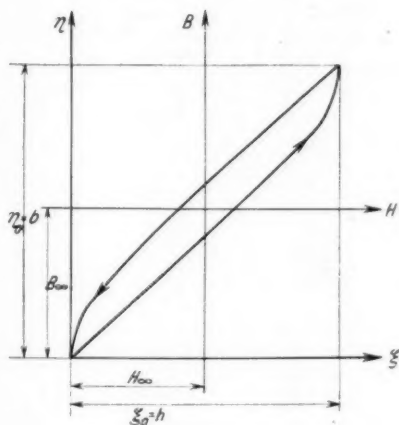


Fig. 2

öffnen, nicht aber störungsfrei schließen. Die einzige Konstruktion, die sich nach vielen Vorversuchen als brauchbar erwies, ist die von Kiessling<sup>1)</sup> angegebene.

### Meßergebnisse

Es wurden nur zentrierte Schleifen gemessen, weil wegen deren Symmetrie der „Einschalt“- ( $E_a$  wird angelegt) und der „Ausschalt“-Vorgang ( $E_a$  wird abgeschaltet) identisch sein müssen, so daß man nur den meßtechnisch bequemer zu verfolgenden Ausschaltvorgang zu untersuchen brauchte. Als Beispiel diene dieser *Protokollauszug*.

Tabelle 1

Zeit $t$ in $10^{-4}$ Sek.	Galvanometer- ausschlag aus 6 Ausschlägen gemittelt	$-\log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)$ 10	Shunt	Datum 29. 11. 1934
0	144,5	0,0000	1	Temperatur + 21°C
4,98	27,28	0,7242	1	
7,47	9,40	1,1870	1	$R_1 = 1000 \text{ Ohm}$
7,47	64,80	1,1875	2	$R_2 = 1000 \text{ Ohm}$
8,71	56,12	1,2500	2	$E_a = 7,20 \text{ Volt}$
8,71	8,12	1,2505	1	
12,45	26,80	1,5710	2	$E_s = 14,40 \text{ Volt}$
12,45	66,63	1,5710	3	$h = 517,1 \text{ mOerst.}$
24,90	32,33	1,8851	3	
24,90	13,00	1,8852	2	$b = 90,30 \text{ Gauss}$
64,74	28,10	1,9460	3	Eisendraht 1 mm $\phi$
114,5	26,23	1,9759	3	
164,3	25,12	1,9947	3	
214,1	24,37	2,0078	3	
263,9	23,53	2,0231	3	
313,7	22,92	2,0345	3	
0	144,1	0,0014	1	
Kommutierung d. Innenbatterie	144,1	0,0014	1	

Der Übersichtlichkeit halber wurden alle gemessenen  $\eta$  durch  $\eta_0$  dividiert und dann  $\ln \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)$  über der Zeit  $t$  aufgetragen. Fig. 3 zeigt auszugsweise aus vielen anderen die zeitlich am weitesten ausgedehnten Meßreihen für Eisen. Dabei ist in der graphischen Darstellung für jede Kurve ein neuer Koordinatenanfangspunkt gewählt, um die Linien nicht zu eng zusammenrücken zu lassen. Als Parameter diene  $h$ , in den Kurven als Zahlen in mOersted eingeschrieben und  $(R_1 + R_2) = R$ .

1) G. Kiessling, a. a. O.

Den Kurven

$$\ln \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) = f(t)$$

ist für große Zeiten ein geradliniger Verlauf eigentümlich, dessen Neigung sowohl von  $h$ , wie auch von der „Geschwindigkeit“  $R/L$  weitgehend unabhängig ist.

Das heißt: für große Zeiten läuft der Vorgang nach einer Exponentialfunktion ab. Man kann also schreiben

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{C_3}{b} e^{-\gamma t}$$

für große  $t$ . Verlängert man diese geraden Kurventeile in der Fig. 3 rückwärts bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse, so erhält man damit  $\ln \left( \frac{C_3}{b} \right)$ .

$\left( \frac{C_3}{b} \right)$  als Funktion von  $h$  zeigt Fig. 3a.

Multipliziert man mit den ballistisch gesondert gemessenen Werten  $b/h$ , welche der Fig. 3b zu entnehmen sind, so erhält man  $C_3/h$  in Fig. 3c. Fig. 3d zeigt endlich noch die wahren Werte von  $C_3$  als Funktion von  $h$ . Die vollen Punkte in diesen Figuren stammen von Messungen, die sich in Fig. 3 nicht mehr übersichtlich einzeichnen ließen.

$C_3/h$  ist für sehr kleine Felder praktisch konstant, d. h. von  $R/L$  sowie von  $h$

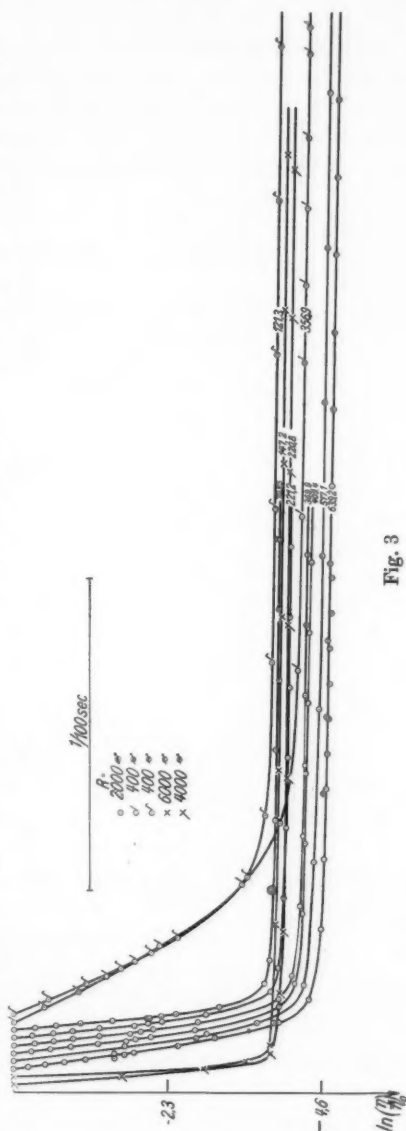


Fig. 3



unabhängig, womit gleichzeitig ein Kriterium dafür gegeben ist, was in diesem Sinne unter „sehr kleinen Feldern“ zu verstehen ist.

Für kleine Zeiten sind die  $\ln \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) = f(t)$ -Kurven ebenfalls merklich geradlinig, also in der Hauptsache auch durch eine

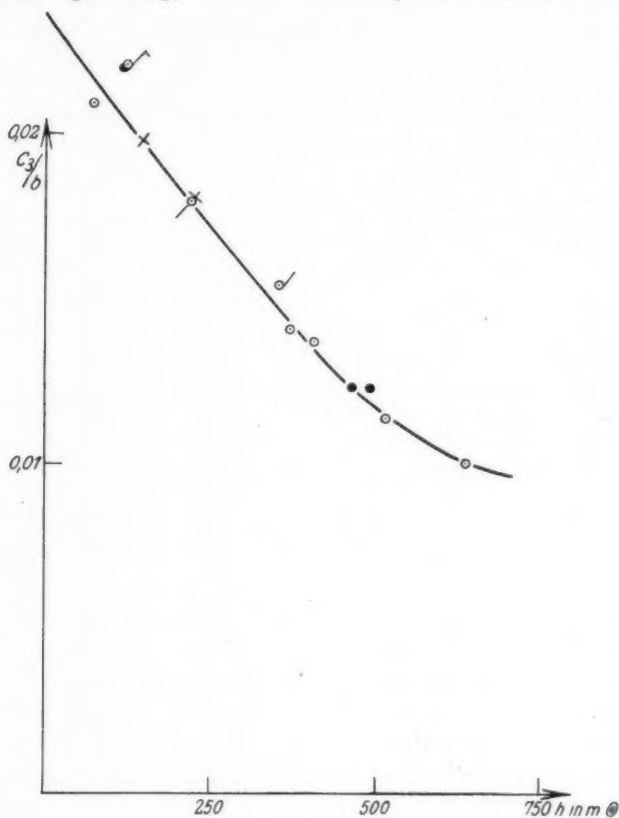


Fig. 3a

Exponentialfunktion darstellbar, deren Exponent im wesentlichen  $\frac{B}{L} = \alpha$  ist. Auf die genauere Analyse in noch eine dritte Exponentialfunktion mit dem Exponenten  $\beta = 2\alpha$ , aber verhältnismäßig kleiner Amplitude, welche durch die Hysteresis hervorgerufen wird, und Störungsglieder höherer Ordnung mit noch größeren Exponenten, sowie auf die Modifikation durch Wirbelströme muß an dieser

Stelle verzichtet werden<sup>1)</sup>. Hysteresis und Wirbelströme können, da sie Exponentialfunktionen mit Exponenten größer als  $\alpha$  verursachen, niemals zur Erklärung eines Verlaufes für große Zeiten, wie die Messungen ihn zeigten, herangezogen werden. Die Hysteresisstörung spielt sich also zu Beginn des Vorganges, die Nachwirkung am Ende ab. Damit ist ein weiterer kennzeichnender Unterschied zwischen Hysteresis und Nachwirkung aufgezeigt.

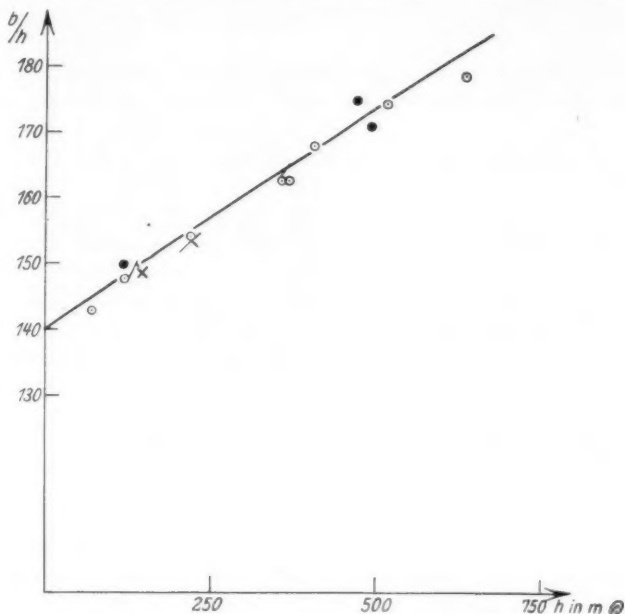


Fig. 3b

Der ganze Vorgang läßt sich also durch die Gleichung beschreiben

$$(2) \quad \eta = C_1 \cdot e^{-\alpha t} + C_2 e^{-\beta t} + C_3 e^{-\gamma t}.$$

Man kann hierin die drei Komponenten so zuordnen:

$C_1 \cdot e^{-\alpha t}$  ist die *Hauptfunktion*. Sie stellt den magnetisch reversiblen Anteil des Vorgangs dar. Diese Hauptfunktion beschreibt den durch die Daten des Meßkreises hervorgerufenen „erzwungenen“ Vorgang.

1) Die ausführliche Abhandlung wird demnächst in den „Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft“ erscheinen.

$C_2 \cdot e^{-\beta t}$  (mit  $\beta = 2\alpha$ ) ist der Hysteresisanteil; diese Störungs-  
funktion gibt den Rayleighschen Verlust.

$C_3 \cdot e^{-\gamma t}$  ist der freie Nachwirkungsvorgang.

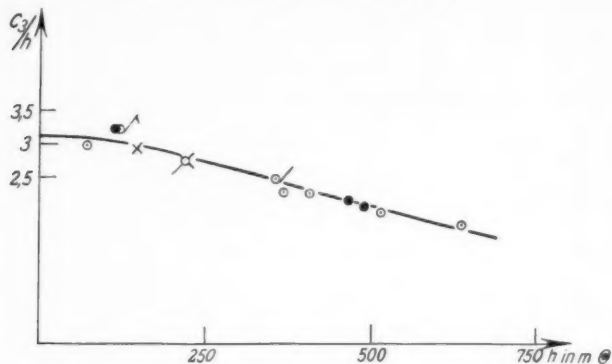


Fig. 3c

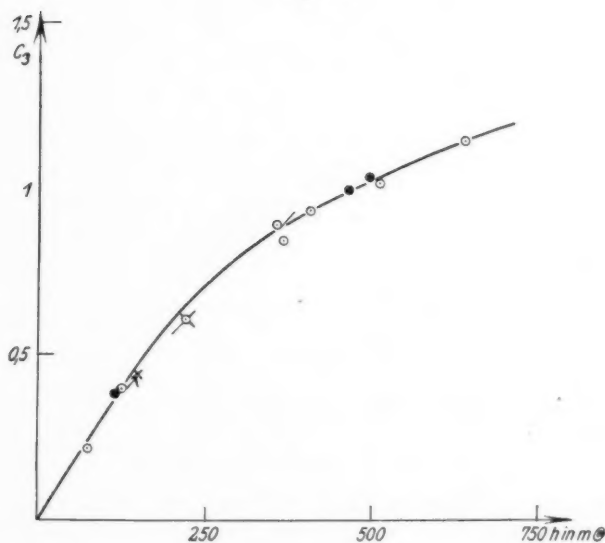


Fig. 3d

Für reine Ausschaltvorgänge, bei denen  $H_\infty = B_\infty = 0$  war, bei denen also das  $B, H$ - und das  $\xi, \eta$ -System in Fig. 2 zusammenfielen, ergaben sich im wesentlichen gleiche Resultate. Die bei Eisen und Stahl ermittelten Zahlenwerte zeigt diese Tabelle.

Werkstoff	$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{C_1}{h} \right) \approx \mu_0$	$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{C_3}{h} \right) = N$	$\gamma$
Eisen . . . .	140	3,1	6,6
Stahl . . . .	53,2	0,30	8,4

Zusammenfassend lautet also der experimentelle Befund: Jeder Schaltvorgang klingt ohne Rücksicht auf seine Vorgeschichte schließlich nach einer nur von Materialkonstanten bestimmten Exponentialfunktion ab.

Ihr Exponent  $\gamma$  ist unabhängig von der „Geschwindigkeit“  $R/L$  der Feldänderung und vom Felde  $h$  selbst und ihre Amplitude  $C_3$  proportional dem Feldsprung  $h$ .

Der durch diese Exponentialfunktion dargestellte freie Vorgang, der nach dem Abklingen des erzwungenen allein übrig bleibt, ist „Nachwirkung“ im wahrsten Sinne des Wortes.

Nachwirkung ist also eine Eigenschaft des Werkstoffes, die frei vom zeitlichen Verlauf der Feldstärke sich allein noch auswirkt, wenn die Feldänderung als solche bereits „vergessen“ ist. Nachwirkung läßt den Werkstoff seinen durch die Kraftänderung bedingten Endzustand nur kriechend annehmen.

#### Die Veranschaulichung der Meßergebnisse

wurde zunächst auf Grund von Gl. (1) durch Konstruktion der  $B, H$ -Schleifen vorgenommen. Zu den gemessenen  $\eta$ -Werten wurden durch numerische Differentiation die zugehörigen  $\xi$  bestimmt und aus beiden die  $\eta, \xi$ -Kurve gezeichnet. Zwei derartige, abfallende Äste zentrierter  $B, H$ -Schleifen mit  $h = 467$  mOersted, aber verschiedenen  $R$ , die als Parameter den entsprechenden Kurven angeschrieben sind, zeigt die Fig. 4 für Eisen. Dabei ist, um bei der Schlankheit der Lanzette wenigstens einigermaßen deutlich sein zu können, in der Ordinatenrichtung, von der Symmetrieachse an gezählt, die Differenz  $\left( \frac{\eta}{\eta_0} - \frac{\xi}{\xi_0} \right)$  in doppelter Überhöhung aufgetragen worden (vgl. die Figur). Um das Hineinkriechen in den Endwert<sup>1)</sup> deutlicher zu zeigen, sind die letzten Kurvenstücke — innerhalb des umrahmten Teiles — in Fig. 4a noch einmal im 10fachen Maßstabe, jedoch ohne Überhöhung dargestellt. Weiter weisen beide Figuren noch eine gestrichelte Kurve auf, welche einen Schaltvorgang in zwei gleichgroßen  $\xi$ -Schritten bei ebenfalls insgesamt  $h = 467$  mOersted und  $R = 200$  Ohm darstellt. Die vollen Kreise endlich bezeichnen

1) In den Figg. 4 und 4a ist der untere Eckpunkt Meßpunkt für alle Kurven. Das allerletzte dynamische Kurvenstück mündet also vertikal.

die quasistatische Kurve für das gleiche  $h$ . Man sieht deutlich, daß die Schleifen eine Vergrößerung bei dem schnelleren Vorgang nur durch Wirbelstromverluste erfahren. Denn man bemerkt, daß für große Zeiten, wo der Wirbelstromeinfluß wegen der nur noch

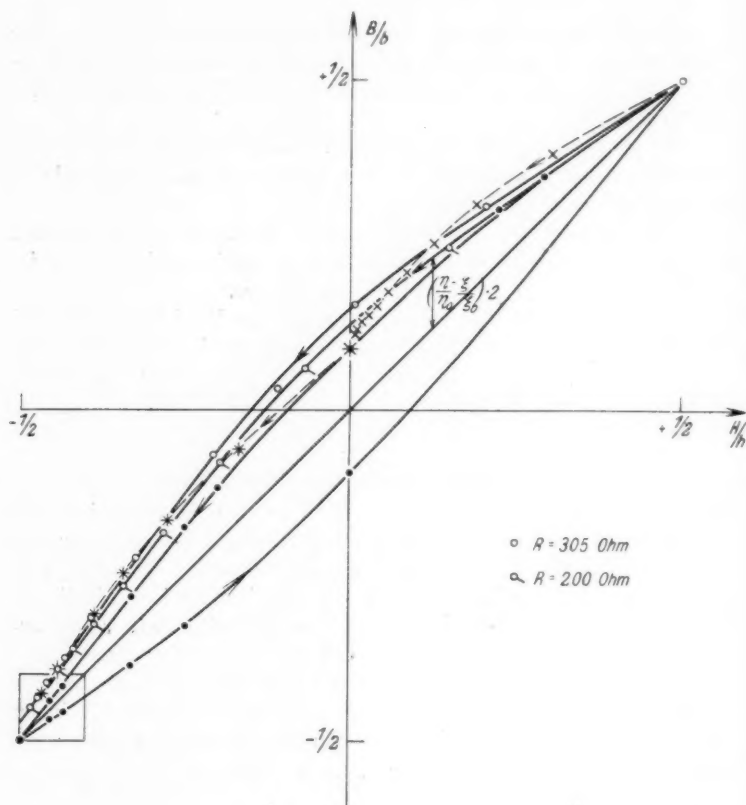


Fig. 4

kriechenden Feldänderung verschwindend klein geworden ist, die dynamischen Kurven wesentlich zusammenfallen. Das ließ sich auch schon daraus schließen, daß in Fig. 3d alle  $C_3$ , die aus den verschiedenst schnellen Vorgängen stammten, ohne merkbare Parameterwirkung von  $R$  glatt auf einer Kurve lagen. Die von der Nachwirkung hervorgerufenen Zusatzverluste sind also, ähnlich wie

die Hysteresisverluste es völlig sind, weitgehend von der Geschwindigkeit unabhängig.

Besonders schön ist an der Zweischrittkurve das Hineinkriechen in den quasistatischen Zwischenpunkt auf der  $B/b$ -Achse zu sehen.

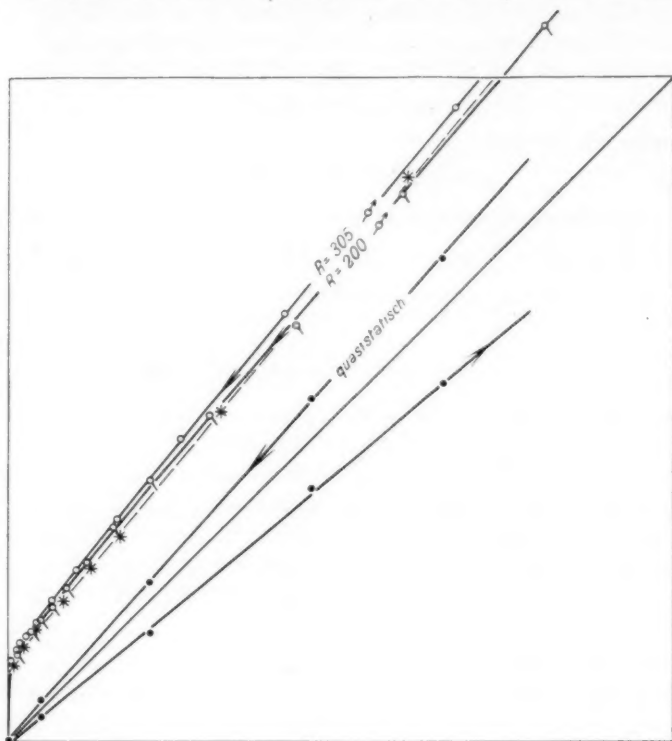


Fig. 4a

Eine Dreischrittkurve in nicht gleichen  $\xi$ -Schritten an Stahl zeigte gleiches.

Jetzt versteht man auch, warum bei den Messungen von E. A. Neumann<sup>1)</sup> und Wittke<sup>2)</sup> die Flächeninhalte der dynamischen Schleifen größer gefunden wurden als die der quasistatisch durchlaufenen. Es setzen sich eben dem quasistatischen Verlauf zwischen den einzelnen Meßpunkten Buckel auf, die von der Nachwirkung herrühren und den Flächeninhalt vergrößern.

1) E. A. Neumann, a. a. O.

2) H. Wittke, a. a. O.

Leider zeigte es sich, daß die Bestimmung der Flächeninhalte auf diese Weise nur qualitativ informatorisches Interesse haben kann, dagegen zur quantitativen Auswertung nicht hinreicht. Das hat seinen Grund in den bei der graphischen Differentiation unvermeidlichen Ungenauigkeiten. Man kann aber die Verluste auf andere Weise genau ermitteln, nämlich durch Berechnung aus Gl. (2). Beschränkt man sich auf extrem kleine Felder, so läßt sich schreiben

$$(3) \quad \eta = C_1 e^{-\alpha t} + C_3 e^{-\gamma t},$$

woraus mit (1) folgt

$$(3a) \quad \xi = \alpha k C_1 e^{-\alpha t} + \gamma k C_3 e^{-\gamma t}.$$

Die Anfangsbedingungen für  $t = 0$ :  $\eta_0 = \mu_0 \xi_0$  und  $\xi_0 = h$  und die Abkürzung  $\alpha k = \frac{1}{\mu}$  ergeben für die Konstanten genähert ( $\alpha \gg \gamma$ )

$$\frac{C_1}{h} = \mu,$$

$$\frac{C_3}{h} = \mu_0 - \mu = N \quad (\text{Nachwirkungszahl}).$$

Das Warburgsche Gesetz liefert daraus den Verlust

$$(4) \quad Q = \frac{N h^2}{4\pi} \frac{\text{erg}}{\text{Zyklus und Volumeneinheit}},$$

der in dieser ersten Näherung von  $\alpha$  und  $\gamma$  unabhängig ist. Zerlegt man einen Schritt in  $n$  Teilschritte, so würde aus (4) folgen, wenn  $N$  von der Anzahl  $n$  der Teilschritte unabhängig wäre,

$$(4a) \quad Q = \frac{N \cdot h^2}{4\pi n}.$$

Einen ersten Versuch zur Prüfung zeigt Fig. 5, in der  $A$  den zeitlichen Verlauf des oberen Teilschrittes,  $B$  den des unteren,  $C$  den des ganzen Schrittes einer zentrierten Schleife mit  $h = 495,6$  mOersted bei  $R = 600$  Ohm darstellt, deren aufsteigender Ast leer durchlaufen wurde, wie die Skizze in Fig. 5 es andeutet.

Es ergab sich für das Verhältnis des Verlustes der Einschriftschleife zum Verlust der Zweischrittschleife

$$1:0,82$$

und nicht

$$1:0,50,$$

wie (4a) es fordert. Immerhin ist damit ein erster Hinweis dafür gegeben, daß sich bei wachsender Aufteilung in Einzelschritte der Nachwirkungsverlust verkleinert; zu untersuchen, wie er das tut, muß einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Ebenso bleibt vor-



läufig die Frage offen, ob man jemals die quasistatische Kurve stetig durchlaufen kann, wenn man den Induktionsabfall mit der Zeit langsam genug vonstatten gehen läßt. Nach (3) und (3a) wäre zu erwarten, daß bei  $\alpha = \gamma$  dieses der Fall sein wird und damit  $Q \rightarrow 0$  geht. Dieses Problem ist am hiesigen Institut bereits in Angriff genommen worden.

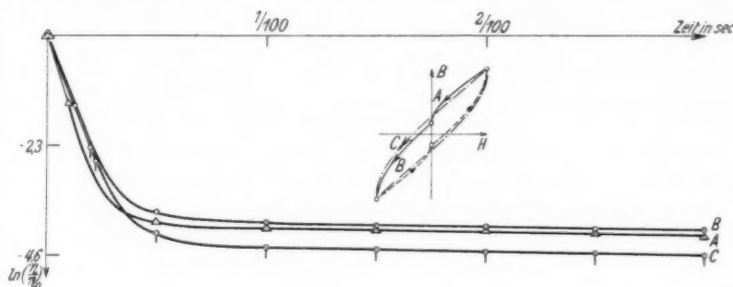


Fig. 5

#### Versuch einer Deutung

Wir wollen versuchen, den beobachteten Verlauf durch eine Beziehung zwischen  $B$  und  $H$  darzustellen. Dabei beschränken wir uns hier auf extrem kleine Felder, weil leicht ersichtlich ist, wie die Formel sich bei etwas größeren Feldstärken verändern würde.

Im statischen Zustande gilt

$$B - \mu_0 H = 0,$$

unter  $\mu_0$  die statische Anfangspermeabilität verstanden. Außerdem existiert eine dynamische Permeabilität  $\mu$ , und wegen der Nachwirkung gilt weder obige Gleichung noch

$$B - \mu H = 0,$$

sondern die Änderungsgeschwindigkeit von  $(B - \mu H)$  ist der Abweichung der Induktion  $B$  vom statischen Zustande  $\mu_0 H$  proportional, in Formel<sup>1)</sup>

$$(5) \quad \boxed{\dot{B} - \mu \dot{H} = -\gamma(B - \mu_0 H)}.$$

Geht man von einem statischen Zustande aus, so ist für  $t = 0$ ,  $B = \mu_0 H$ , also  $\mu = \frac{dB}{dH}$ ; d. h.  $\mu$  ist die Anfangsneigung an der Spitze der  $B, H$ -Lanzette,  $\mu_0$  dagegen die Achsenneigung der Lanzette,

1) Diese Formel findet sich schon bei v. Schweidler, Ann. d. Phys. [4] 24. S. 711. 1907 auf S. 740 als erste Gleichung für das dielektrische Analogon.

und zwar ist  $\mu_0 > \mu$ . Nimmt man zu (5) noch (1) hinzu, so entsteht das Gleichungspaar

$$(6) \quad \dot{B} = \mu \dot{H} - \gamma (B - \mu_0 H),$$

$$(6a) \quad k \dot{B} + H = H_\infty,$$

welches durch die Substitution  $\xi = H - H_\infty$  und  $\eta = B - B_\infty$  in die Form übergeht:

$$\dot{\eta} = \mu \dot{\xi} - \gamma (\eta - \mu_0 \xi),$$

$$k \dot{\eta} + \xi = 0.$$

Man befriedigt es durch den Ansatz

$$\eta = C e^{-\lambda t},$$

$$\xi = D e^{-\lambda t}.$$

Das  $\lambda$  bestimmt sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 - \frac{1 + k \mu_0 \gamma}{k \mu} \cdot \lambda + \frac{\gamma}{k \mu} = 0.$$

Ist  $\gamma$  sehr viel kleiner als  $\alpha$  und benützt man wieder die Abkürzung  $\frac{1}{k \mu} = \alpha$ , so wird genähert

$$\lambda_1 = \alpha,$$

$$\lambda_2 = \gamma.$$

Mit den Anfangsbedingungen wird jetzt in Näherung

$$(7) \quad \eta = h (\mu e^{-\alpha t} + (\mu_0 - \mu) e^{-\gamma t}),$$

$$(7a) \quad \xi = h e^{-\alpha t}.$$

Das ist tatsächlich der beobachtete Verlauf von  $\eta$ , in dem der zweite Term in der Klammer von  $\alpha$  und  $h$  unabhängig ist, wie der experimentelle Befund (Fig. 3c) es verlangt.

Gl. (5) kann Anspruch auf allgemeine Gültigkeit nur erheben, wenn sie den Magnetisierungszustand für beliebige Feldänderungen zu beschreiben vermag.

Es soll also jetzt der vor allen interessierende Fall periodischer Feldänderung untersucht werden. Es ist dann in (6a) zu setzen

$$H_\infty = F e^{i \omega t}$$

und als Lösungsansatz

$$B = C e^{i \omega t},$$

$$H = D e^{i \omega t}.$$

Damit wird

$$i \omega C = i \mu \omega D - \gamma (C - \mu_0 D)$$

und

$$i k \omega C + D = F.$$

Hieraus ergibt sich für  $\gamma \ll \omega$  annähernd

$$(8) \quad \begin{cases} B = \mu D e^{i(\omega t - \delta)}, \\ H = D e^{i\omega t}, \end{cases} \quad \delta = \frac{\gamma}{\omega} \cdot \frac{\mu_0 - \mu}{\mu}.$$

Der Verlust wird daraus nach Warburg mit  $D = \frac{h}{2}$

$$(9) \quad Q = \frac{N h^2}{4\pi} \cdot \frac{\gamma \pi}{4\omega}$$

in krassem Widerspruch zu den Ergebnissen von Jordan, Goldschmidt und Wittke.

Um Gl. (9) für die Verluste bei periodischer Erregung mit der Erfahrung in Einklang zu bringen, könnte man daran denken, nach dem Vorgange von K. W. Wagner<sup>1)</sup>, der das nach v. Schweidlers<sup>2)</sup> Vorschlag für dielektrische Nachwirkung getan hat, auch hier statt eines einzigen  $\gamma$  eine kontinuierliche Folge aller  $\gamma$  in (5) anzunehmen, deren Verteilungsfunktion noch zu ermitteln wäre.

Aus den bisher bekannt gewordenen Ergebnissen ist das jedoch leider nicht möglich; denn erstens haben die Wechselstrommessungen nur völlig frequenzunabhängige  $Q$ -Werte ergeben, das bedeutet, daß das Frequenzintervall noch nicht bis zu „kleinen“ bzw. „großen“  $\omega$ -Werten ausgedehnt worden ist, — bei denen dieser Verlust in Analogie zu dem Wagnerschen Mechanismus für Dielektrika verschwinden müßte — zweitens kann aus den hier veröffentlichten und sonst bekannt gewordenen Messungen des freien Vorganges bei Gleichstromschaltungen auch nichts darüber ausgesagt werden, weil die Beobachtungen zeitlich noch nicht weit genug ausgedehnt worden sind.

Diese Lücke soll in einer jetzt begonnenen Untersuchung ausgefüllt werden.

Bisher kann nur folgendes gesagt werden: Dem Hauptvorgang bei einer Gleichstromschaltung, dessen Ablauf Selbstinduktion und Widerstand des Schaltkreises bestimmen, überlagert sich ein freier Vorgang, der mit der bisher erreichten Genauigkeit wie eine Exponentialfunktion langsam abklingt.

Die Durchführung dieser Arbeit ermöglichte dem Verf. ein Stipendium der Notgemeinschaft. Ebenso wie ihr sei an dieser Stelle Herrn Prof. R. Gans für Anregung, Kritik und Institutsmittel herzlich gedankt.

1) K. W. Wagner, Ann. d. Phys. [4] 40. S. 817. 1913.

2) v. Schweidler, a. a. O.

## Nachtrag

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit ist eine Veröffentlichung von Preisach<sup>1)</sup> über das gleiche Thema erschienen. Er findet bei einem ganz anders gearteten Werkstoff (hochprozentige Eisen-Nickel-Legierung) ebenfalls den freien Vorgang. Jedoch trägt er  $\frac{\eta}{\eta_0} = f(\ln t)$  auf und erhält dafür gerade Linien, deren Neigungen linear von  $h$  abhängen. Ich habe meine Messungsergebnisse, die wohl genauer sind als die Preisachschen, versuchsweise ebenso aufgetragen und ebenfalls gerade Linien bekommen, die aber im Gegensatz zu seinen Geraden parallel zueinander verliefen. Umgekehrt habe ich — so gut das möglich war, da Preisach keine Zahlen, sondern nur graphische Darstellungen gibt — seine Resultate nach meiner Art, nämlich  $\ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) = f(t)$  aufgezeichnet.

Sie lagen, wenn auch stärker streuend, auf parallelen Geraden, wie die meinigen. Zwischen seinen Ergebnissen und meinen besteht also kein Widerspruch, dagegen führt meine Darstellungsweise auf einfachere Formeln.

---

1) F. Preisach, Ztschr. f. Phys. **94**. S. 277. 1935.

Königsberg/Pr., II. Physikalisches Institut, den 3. Mai 1935.

(Eingegangen 23. Mai 1935)

# **Einige Bemerkungen über den Ferromagnetismus bei kleinen Feldänderungen**

*Stellungnahme zu den Ausführungen des Herrn H. Jordan<sup>1)</sup>*

**Von Richard Gans und Heinz Wittke**

Herr Jordan<sup>2)</sup> hat die bei kleinen Wechselfeldern im Ferromagnetikum auftretenden Verluste einer Analyse unterzogen und dabei festgestellt, daß der auf den Zyklus und die Volumeinheit bezogene Verlust sich in der Form

$$Q = \frac{\lambda}{8\pi} h^2 + \frac{\nu}{12\pi} h^3 + \gamma h^2 \omega$$

darstellen läßt, wo  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  von der Feldänderung  $h$  (diese verläuft von  $-\frac{h}{2}$  bis  $+\frac{h}{2}$  und zurück bis  $-\frac{h}{2}$ ) sowie von der Kreisfrequenz  $\omega$  unabhängig sind. Er deutete diese drei Anteile als Nachwirkung, Hysteresis- und Wirbelstromverlust.

Daß ein Nachwirkungsverlust in weiten Grenzen von der Frequenz unabhängig sein kann, hat K. W. Wagner<sup>3)</sup> bei Behandlung dielektrischer Verluste gezeigt. Allerdings muß dieser Verlust nach dem von ihm zugrunde gelegten Mechanismus für genügend kleine sowie für genügend große Frequenzen verschwinden.

Jordan ist der Überzeugung, daß die magnetische Nachwirkung sich in ganz analoger Weise wie die elektrische erklärt. Geht er doch auf die Wagnersche Theorie ausführlich ein.

Um festzustellen, ob der von Jordan beobachtete Verlust bei kleinen Frequenzen abnimmt, unternahmen wir es<sup>4)</sup>, ihn zwischen 12,5 und 66,7 Hz anstatt bei Hörfrequenzen zu messen, da wir es nicht für unmöglich hielten, daß in diesem Gebiet eine Frequenzabhängigkeit auftreten könnte. Man geht doch in der Physik immer so vor, wenn eine Erscheinung mittels einer Theorie in einem gewissen Beobachtungsgebiet erklärt worden ist, daß man das Beobachtungsgebiet erweitert, besonders wenn nach Aussage der herangezogenen Theorie in diesem neuen Gebiet etwas Besonderes (in unserem Falle Frequenzabhängigkeit) auftreten müßte. Uns erscheint

1) H. Jordan, Ann. d. Phys. [5] **21**. S. 405. 1934.

2) H. Jordan, Elektr. Nachrichtentechnik **1**. S. 7. 1924.

3) K. W. Wagner, Ann. d. Phys. [4] **40**. S. 817. 1913.

4) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] **18**. S. 679. 1933.

deshalb unser damaliger Arbeitsplan gar nicht so unvernünftig. Übrigens hat auch M. Wien<sup>1)</sup>, als unsere Untersuchung über diese Frage bereits im Gange war, aus denselben Erwägungen heraus es für erwünscht gehalten, die Jordanschen Messungen bei kleinen Frequenzen zu wiederholen.

Dabei zeigte es sich nun, daß sich auch bei so kleinen Wechselzahlen der Jordansche Verlust immer noch als frequenzunabhängig ergab<sup>2)</sup>. Die Schlüsse, die man daraus ziehen kann, sind die: Entweder nimmt dieser Verlust gar nicht mit  $\omega$  bis auf Null ab; dann wäre es nicht gestattet, sie durch die Wagnersche Theorie zu erklären. Oder die Wagnersche Theorie gilt; dann wären die kleinsten von uns benutzten Frequenzen immer noch nicht klein genug. In diesem Falle würde das negative Resultat über die von uns benutzten Materialien im Sinne der Wagnerschen Theorie gewisse Aussagen erlauben, und es würde Physikern, die die behandelte Erscheinung im Rahmen dieser Theorie prüfen wollen, für künftige Versuche einen Fingerzeig geben, welcher Frequenzbereich bei ähnlichen Werkstoffen höchstens als aussichtsreich in Frage kommt. Gerade weil „es sich nicht abschätzen läßt, wie schnell oder wie langsam Änderungen der Feldstärke erfolgen müssen, damit entweder die Nw.-Bewegung nicht merklich beginnen kann oder merklich abgelaufen ist“<sup>3)</sup>, erschienen uns solche Versuche nützlich.

Allerdings meint Jordan, daß man von vorneherein die Aussichtslosigkeit unserer Messungen in dem von uns benutzten Frequenzbereich hätte einsehen können, denn „es wäre nach den Beobachtungen zu erwarten, daß die letztere Grenze praktisch frühestens erreicht wird bei Schwingungsdauern, die nach Minuten zählen“ (Jordan § 11e). Es ist uns nicht klar, welche Beobachtungen Hrn. Jordan zu dieser Abschätzung führen, die er ausspricht, ohne sich auf bestimmte Werkstoffe zu beziehen. Hier scheint er von unrichtigen Voraussetzungen auszugehen, wie die Ausführungen in seinem § 25 zeigen, oder er hat wenigstens Werkstoffe im Auge, die mit den von uns benutzten nicht vergleichbar sind. Er meint, daß unsere ballistischen Messungen<sup>4)</sup> wegen der zu kleinen Viertelperiode des ballistischen Galvanometers (sie betrug

1) M. Wien, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 736. 1931.

2) Um Unabhängigkeit des Verlustes von der Wechselzahl in einem endlichen Niederfrequenzgebiet festzustellen, braucht man natürlich keine Messungen mit Tonfrequenz durchzuführen, wie Hr. Jordan am Schlusse § 19 meint.

3) H. Jordan, Ann. d. Phys. [5] 21. S. 405. 1934.

4) H. Wittke, Ann. Phys. [5] 20. S. 106. 1934.

bei unserem Instrument 5,5 Sek.) immer noch durch Nachwirkung gefälscht sein müßten, die „nach Minuten, ja Stunden und Tagen noch meßbare Effekte gibt“. Aus unseren in der vorstehenden Arbeit<sup>1)</sup> abgedruckten Meßergebnissen geht jedenfalls hervor, daß die Induktion bei den von uns benutzten beiden Werkstoffen bei Ausschaltvorgängen nach einer Sekunde auf  $3,0 \cdot 10^{-5}$  resp.  $1,3 \cdot 10^{-6}$  ihres Anfangswertes abgefallen ist, sich also der Messung entzieht. Von Minuten, ja Stunden und Tagen ist erst recht nicht zu reden. Würde Hr. Jordan seine Bemerkung an die kürzlich von Hrn. Preisach<sup>2)</sup> veröffentlichten Versuche geknüpft haben, würde er allerdings Recht haben, da bei dessen Fe-Ni-Legierung die Nachwirkung viel länger andauert.

Was die Verbesserungen unserer Versuchsanordnung anbetrifft, die Hr. Jordan nicht anerkennt, so bestanden sie außer in den wegen der Prüfung der Wagnerschen Theorie schon erwähnten viel kleineren Frequenzen in der etwas veränderten Brückenschaltung, die es uns erlaubte, die felderregende Stromstärke direkt am Meßinstrument abzulesen (Division durch 2), während Jordan sie „aus der am Amperemeter angezeigten Stromstärke mittels der Brückenverhältnisse (gemeint ist: aus Widerständen, Selbstinduktionen und Frequenz) berechnen“ muß. Da es auf diese Feldstärke bei der Zerlegung des Gesamtverlustes genau ankommt, scheint uns unsere Schaltung, die übrigens auf Giebe<sup>3)</sup> zurückgeht, in der Tat praktisch zu sein. Jordan sagt zwar in seinem § 18, er hätte auch die Giebesche Anordnung benutzt und hätte das auch hervorgehoben. Daß er Giebe zitiert, ist richtig, aber wie erklärt sich dann sein Schaltschema, daß der von Giebe ausdrücklich gegebenen Vorschrift nicht entspricht? Durch ein Versehen in der Zeichnung wohl kaum; denn dann wäre wieder die Bemerkung, daß „die Stromstärke aus den Brückenverhältnissen berechnet werden kann“, unverständlich.

Weiter beanstandet Jordan, daß wir in der sorgfältigen Isolierung der Drähte voneinander zur möglichststen Vermeidung von Wirbelströmen einen Vorteil gegenüber den von ihm benutzten Ringen aus blanken Draht sehen. Es handelt sich um folgendes: Jordan hat bereits richtig erkannt, daß es an und für sich unsicher ist, ob das von ihm entdeckte und als Nachwirkung gedeutete Verlustglied  $\frac{k}{8\pi} h^2$  wirklich die ganze Nachwirkung darstellt, oder ob in dem dritten Glied  $\gamma h^2 \omega$  nicht auch noch ein Teil der Nach-

1) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] **23**. S. 442. 1935.

2) F. Preisach, Ztschr. f. Phys. **94**. S. 277. 1935.

3) E. Giebe, Ztschr. f. Instrumentenkde. **31**. S. 6, 33. 1911.



wirkung steckt, während der Rest den Wirbelströmen zuzuschreiben wäre. Diese Wirbelströme interessieren uns aber nicht, wenn wir uns auf die rein magnetischen Vorgänge einstellen, weil sie sekundärer Natur sind. Man könnte ihren Einfluß studieren und von den sonstigen Verlusten in Abzug bringen, wenn man Untersuchungen an Drähten desselben Materials, aber verschiedenen Durchmessers verwenden würde. Das scheitert aber wohl daran, daß man keine Gewähr dafür hat, bei verschiedenen Dimensionen wirklich mit magnetisch gleichem Material arbeiten zu können. Zweitens wäre es besonders günstig, wenn man über so dünne Drähte verfügte, daß die Wirbelstromverluste zu vernachlässigen wären, so daß ein etwa auftretendes  $\omega$  proportionales Glied (pro Zyklus gerechnet) nicht ihnen, sondern einer anderen Erscheinung, also etwa der Nachwirkung, zugeschrieben werden müßte. Sonst bleibt einem nichts anderes übrig, als die Wirbelstromverluste aus den Drahtdimensionen, der Frequenz und der in Frage kommenden Permeabilität zu berechnen und mit den Daten der Erfahrung zu vergleichen. So geht Jordan in seiner Arbeit aus dem Jahre 1924 vor und gibt an, daß dieser Verlust nach Messung  $1,9 \cdot 10^{-3}$ , nach Rechnung  $1,8 \cdot 10^{-3}$  betragen habe. Er schließt daraus, daß das  $\omega$  proportionale Verlustglied nur durch Wirbelstrom bedingt sei. Dieses aus den Messungen an drei Werkstoffen von ihm ausgewählte Resultat gilt aber nur für Stahl, denn früher hat er seine durch Wirbelstrom bedingten Zusatzwiderstände  $w$  durch folgende Tabelle dargestellt:

	$w$	
	beob.	ber.
Eisendraht 0,30 mm	140	86
" 0,20 mm	50	31
Stahldraht 0,15 mm	9,5	9,2

Da er selbst sagt: „Die berechneten Werte sind für die Eisendrahte erheblich kleiner als die beobachteten, ein Zeichen dafür, daß die Isolierung nicht ausreichte“, schien es uns wohl berechtigt, zu fragen, ob die stets größeren beobachteten Werte nicht vielleicht auf andere Verluste zurückzuführen sind. Es zeigte sich nun aus unseren Messungen<sup>1)</sup>, daß sich diese Verluste bei überlagerten Gleichstromfeldern außerordentlich genau wie die Quadrate der in Frage kommenden Permeabilitäten verhalten, wie es bei Wirbelstrom sein muß, und daß der absolute Wert des gemessenen Verlustes bei Eisen bis auf etwa 8% mit dem errechneten übereinstimmt. Bedenkt man, daß der Wirbelstromverlust von der 4. Potenz des

1) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 679. 1933.

Drahtdurchmessers abhängt, so kann man jedenfalls sagen, unsere Messungen sind wenigstens nicht in Widerspruch mit der Annahme, daß das  $\omega$  proportionale Verlustglied nur durch Wirbelströme bedingt ist. Während wir uns bei Eisen so vorsichtig ausdrücken müssen, können wir für Stahl, bei dem dieses Verlustglied überhaupt praktisch Null war, eindeutig behaupten, daß die rein magnetischen Verluste in dem gemessenen Frequenzbereich wirklich von  $\omega$  unabhängig sind. Bei den Jordanschen Versuchen war die Unsicherheit in dieser Beziehung wesentlich größer. Deshalb hatten wir mit Bezug auf unser Isolierverfahren von Verbesserung der Jordanschen Versuchsanordnung gesprochen. Wenn er „eine Angabe darüber vermißt, daß der Aufwand an Isoliermitteln erforderlich war“, fragen wir, wem wir das hätten sagen müssen.

Wir hatten ferner versucht<sup>1)</sup> auf Grund einer kurzen Präzisierung der Rayleighschen Resultate mit Berücksichtigung des Jordanschen Verlustgliedes eine Beziehung zwischen  $B$  und  $H$  aufzustellen. Dies ergab alle von Jordan in seiner ersten Arbeit festgestellten Tatsachen für periodische Magnetisierungen. Darüber hinaus zeigten wir, daß die aus Rayleighs Beobachtungen von verschiedenen Seiten gezogenen Schlüsse zu speziell waren (in unserer Beziehungsweise: daß  $\nu \neq \frac{\nu'}{2}$  zu sein braucht). Wir hatten dabei Jordans zweite Arbeit<sup>2)</sup> nicht beachtet, in der er auf Grund neuerer Messungen zu genau dem gleichen Ansatz gekommen war. Hierin gebührt ihm also zweifellos die Priorität. Ferner hatten wir geglaubt, das Jordansche Verlustglied trotz Beibehaltung der Rayleighschen Parabeln mit in unsere Formel hineinbeziehen zu können. Das ist, wie Jordan richtig bemerkt, wegen der von Shakelton und Barber<sup>3)</sup> gemessenen Oberwelle nicht möglich, weil diese  $h^2$  proportional ist.

Auch die bereits früher von Goldschmidt<sup>4)</sup> angestellten Versuche mit überlagertem konstanten Feld haben wir übersehen. Sonst hätten wir sie natürlich zitiert. Aus seinen wie unseren Messungen geht hervor, daß der Verlustwinkel mit wachsendem überlagerten Gleichstromfeld immer kleiner, die Schleife also relativ immer schlanker oder der Vorgang immer reversibler wird, im Gegensatz zu dem, was Jordan am Schluß seines § 7 sagt.

Bezüglich der Deutung der bekannten Tatsachen liegt die

1) R. Gans, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 701. 1933.

2) H. Jordan, Ztschr. f. techn. Phys. 11. S. 2. 1930.

3) Diese Arbeit ist uns unzugänglich. Beim Zitieren der nordamerikanischen Autoren hat Jordan sich offenbar versehen.

4) R. Goldschmidt, Ztschr. f. techn. Phys. 11. S. 8. 1930.

Situation unseres Erachtens wohl so: Die bei magnetometrischen oder ballistischen Messungen gewonnenen Punkte in der  $B$ - $H$ -Ebene können, wie üblich, durch eine stetige Kurve miteinander verbunden werden. Diese Kurve ist der geometrische Ort der Endzustände von Schaltvorgängen und zunächst nichts Weiteres. Insbesondere kann die von ihr umspannte Fläche deshalb auch nicht als irgendein Verlust gedeutet werden. Nennt man sie quasistatische Kurve, wie das allgemein getan wird, so setzt man stillschweigend voraus, daß sie wirklich durchlaufen werden kann. Ob das möglich ist, wissen wir bis heute nicht.

Im allgemeinen wird sie nicht stetig durchlaufen, sondern es setzen sich bei Schaltvorgängen Buckel auf sie auf, die sich von Meßpunkt zu Meßpunkt erstrecken. Durch unsere vorstehende Untersuchung haben wir festgestellt, daß diese Buckel durch Nachwirkung zustande kommen, und durch quantitative Feststellung des Nachwirkungsverlaufs konnten wir uns überzeugen, daß die Fläche der Buckel ein Maß für den Nachwirkungsverlust ist. Dann ist die Fläche der quasistatischen Schleife ein Maß für den Hysterisisverlust, wobei dieser definitionsmäßig der Gesamtverlust nach Abzug des Nachwirkungsverlustes ist.

Da nun aus den Untersuchungen von Jordan sowie Shkelton und Barber hervorgeht, daß bei periodischen Vorgängen der Jordansche Effekt sich der „quasistatischen“ Kurve einfach überlagert, scheint es plausibel, daß er auch in Nachwirkung besteht. Aber das gilt nur insoweit, als die Shkelton-Barberschen Oberwellenmessungen wirklich mit der Fourierschen Zerlegung der Rayleighschen quasistatischen Kurve übereinstimmen<sup>1)</sup>. Ohne diese Untersuchung und ohne unser Studium der Nachwirkung, d. h. rein auf Grund der Jordanschen Verlustmessungen, hätte man den Schluß nicht ziehen können, wie aus unserer früheren Darstellung erhellt<sup>2)</sup>.

Bezüglich der Wagnerschen Theorie besteht ein krasser Widerspruch zwischen dem Nachwirkungsverlust bei periodischen Feldänderungen und bei Schalterscheinungen, auf den in unserer vorstehenden Arbeit aufmerksam gemacht worden ist.

1) Es ist nur die Existenz einer solchen Oberwelle festgestellt, und über ihre Amplitude kann man nur aussagen, daß sie  $h^2$  proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor, der zur Feststellung der erwähnten Übereinstimmung notwendig wäre, ist unbekannt.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 701. 1933.

Königsberg (Pr.), II. Physikalisches Institut, 20. Mai 1935.

(Eingegangen 23. Mai 1935)

## Untersuchungen über die kinetische Theorie der Gase

### I. Schallabsorption

Von K. F. Herzfeld

(Rowland Physical Laboratory, Johns Hopkins University,  
Baltimore, Maryland)

Die Absorption von Schall in Gasen wurde zuerst von Kirchhoff und Stokes<sup>1)</sup> auf Grund der Reibung und Wärmeleitung erklärt. Für den speziellen Fall eines dissoziierenden Gases hat Einstein<sup>2)</sup> den Einfluß der endlichen Reaktionsgeschwindigkeit berücksichtigt. Herzfeld und Rice<sup>3)</sup> haben außerdem zur Erklärung die Langsamkeit des Energieaustausches mit den inneren Freiheitsgraden herangezogen, und zahlreiche theoretische und experimentelle Arbeiten haben sich angeschlossen<sup>4)</sup>.

Neuere Arbeiten<sup>5)</sup> aber scheinen anzudeuten, daß selbst in Helium die Absorption größer ist, als man nach der Wärmeleitung und Viskosität erwarten sollte, und da es in diesem einatomigen Gas keine inneren Freiheitsgrade gibt, muß man nach einer anderen Erklärung suchen.

In dieser Arbeit wird untersucht, ob das Geschwindigkeitsgefälle bei diesem Prozeß so hoch ist, daß man Abweichungen von der Gasgleichung erwarten muß.

Die hydrodynamischen Gleichungen für die makroskopische Bewegung von Gasen sind von H. A. Lorentz<sup>6)</sup> theoretisch auf Grund der kinetischen Theorie abgeleitet worden, aber die Effekte, die hier untersucht werden sollen, sind dort explizit vernachlässigt worden.

In einer äußerst interessanten Arbeit hat M. Brillouin<sup>7)</sup> die nächste Annäherung entwickelt, nämlich die Bewegungsgleichung

1) C. G. Stokes, Trans. Cambr. Phil. Soc. 8. S. 287. 1845; G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 143. S. 177. 1868.

2) A. Einstein, Berl. Ber. S. 380. 1920.

3) K. F. Herzfeld u. F. O. Rice, Phys. Rev. 31. S. 691. 1928.

4) Vgl. z. B. E. Großmann, Handbuch der Exp. Physik, XVII 1. Leipzig 1934.

5) H. O. Kneser, Ann. d. Phys. [5] 16. S. 337. 1933; R. W. Curtis, Phys. Rev. 46. S. 811. 1934.

6) H. A. Lorentz, Arch. Neerl. 16. S. 1. 1881; Abh. über theor. Phys., S. 72. Leipzig 1907.

7) M. Brillouin, Ann. d. chim. et de phys. 20. S. 440. 1900.

und die Wärmeleitung bis zu Differentialquotienten dritter Ordnung. Da aber zu jener Zeit die Theorie der Integralgleichungen noch nicht existierte, ist seine Methode nicht gerechtfertigt, obwohl seine Resultate wahrscheinlich richtig sind. Er leitet nicht nur Gleichungen ab, die (19'), (19'') entsprechen, sondern behandelt auch den dreidimensionalen Fall, der in der nächsten Arbeit berücksichtigt wird, und untersucht die Eigenschaften der Koeffizienten.

J. E. Jones<sup>1)</sup> hat dann die Methoden von Chapman<sup>2)</sup> angewendet, um die Untersuchung beträchtlich weiterzutreiben. Zunächst modifiziert er Brillouins Formeln in Einklang mit der Theorie der Integralgleichungen. Zweitens benutzt er Chapmans Methoden zur wirklichen Berechnung der Verteilungsfunktion bis zu Termen zweiter Ordnung (zweite Näherung), d. h. er bestimmt die Funktionen  $f_2$  (deren Form in der vorliegenden Arbeit nicht besprochen wird), in ihrer Abhängigkeit vom molekularen Modell, und berechnet entsprechend die Konstanten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (vgl. I, 18). Schließlich schreibt er eine Gleichung für die Spannungen, allerdings in anderer Form, als es in dieser Arbeit geschehen wird.

Rocard<sup>3)</sup> benutzt den Spannungsausdruck zur expliziten Formulierung der Bewegungsgleichung.

Da diese Arbeiten wenig bekannt sind, da wir hier bis zu einer höheren Ordnung der Annäherung gehen müssen (für die Wärmeleitfähigkeit sogar bis zu zwei höheren Näherungen), und da es ferner notwendig scheint, die Methode in explizite Übereinstimmung mit der Theorie der Integralgleichungen zu bringen, ist es notwendig, von Anfang anzufangen.

Wir wollen hier makroskopische Bewegung in der  $x$ -Richtung allein betrachten, und werden daher einfachheitshalber die Gleichungen nur für diesen Fall schreiben.

Die Anzahl von Molekülen pro Kubikzentimeter, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$ ,  $\eta$  und  $\eta + d\eta$ ,  $\zeta$  und  $\zeta + d\zeta$  liegen, ist

$$(1) \quad dN = n F(\xi, \eta, \zeta, T, x) d\Omega,$$

wo  $n$  die Anzahl von Molekülen pro Kubikzentimeter,  $d\Omega = d\xi d\eta d\zeta$  bedeutet. Die zeitliche Änderung dieser Zahl in Abwesenheit von äußeren (Volumen-)Kräften folgt aus Boltzmanns Fundamentalgleichung der Gastheorie:

$$(2) \quad b - a = \frac{\partial}{\partial t} (nF) + \xi \frac{\partial}{\partial x} (nF) = F \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \xi \frac{\partial n}{\partial x} \right) + n \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} \right).$$

1) J. E. Jones, Trans. Roy. Soc. **223**. S. 1. 1923.

2) S. Chapman, Trans. Roy. Soc. **216**. S. 279. 1915; **217**. S. 115. 1916.

3) Y. Rocard, Ann. de phys. S. S. 1. 1927.

Hier ist  $a$  die Anzahl der Stöße, die die Moleküle  $dN$  mit irgendwelchen anderen Molekülen erleiden,  $b$  die Anzahl der Stöße pro Kubikzentimeter, in denen nach dem Stoß ein Molekül Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$ ,  $\eta$  und  $\eta + d\eta$ , ... hat, d. h. zu  $dN$  gehört.

Nach Boltzmann ist

$$(3) \quad \begin{cases} b - a = n^2 \int d\xi d\eta d\zeta [F(\xi, \eta, \zeta) F(\xi', \eta', \zeta') \\ - F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) F(\xi_1', \eta_1', \zeta_1')] Z d\gamma. \end{cases}$$

Hier ist  $\gamma$  ein Parameter, der die Art des Stoßes angibt (z. B. der Winkel zwischen der Relativgeschwindigkeit und der Verbindungslinie der Zentren),  $Z$  die Anzahl von Stößen der bestimmten Art, wenn nur ein Molekül jedes Geschwindigkeitstyps vorhanden wäre;  $\xi_1 \dots$  und  $\xi_1' \dots$  sind die Geschwindigkeiten, die die Moleküle nach dem bestimmten Stoß haben. Wir kürzen die rechte Seite von (3) ab als  $1/\varrho [FF]$ , wo  $\varrho$  eine kleine, später zu besprechende Konstante ist.

Wir machen nun die Annahme, daß die Amplituden der makroskopischen Bewegungen so klein sind, daß ihre Quadrate immer vernachlässigt werden können.

Ferner definieren wir als mittlere makroskopische Geschwindigkeit:

$$(4) \quad u = \int \xi F d\Omega$$

und

$$(5) \quad \frac{3}{2} k T = \int \frac{m}{2} [(\xi - u)^2 + \eta^2 + \zeta^2] F d\Omega.$$

Wir schreiben nun:

$$(6) \quad F = F' + f,$$

$$(6') \quad F' = \sqrt{\frac{m}{2\pi k T}} \exp \left[ -\frac{m}{2} \frac{(\xi - u)^2 + \eta^2 + \zeta^2}{k T} \right].$$

Wir wissen ferner, daß  $[F' F'] = 0$  ist. Mit

$$F_0 = \left( \frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2} \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{k T_0}}$$

kann man schreiben:

$$F' = F_0 - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} u + \frac{\partial F}{\partial T} \Delta T.$$

Vernachlässigt man Quadrate der kleinen Größen  $f, u, \Delta T$  und führt

den Ausdruck  $s = \frac{An}{n_0}$ , die „Kondensation“, ein, so nimmt die Fundamentalgleichung (2) die Form an<sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho} [f F_0] = F_0 \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \xi \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_0}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \xi \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial F}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x}. \end{cases}$$

Man entwickelt nun<sup>2)</sup>  $f$  in eine Potenzreihe nach einem kleinen Parameter  $\varrho$

$$(8) \quad f = \varrho f_1 + \varrho^2 f_2 + \varrho^3 f_3 + \dots$$

Im Falle der Schallfortpflanzung ist  $\varrho \sim \frac{\text{mittlere freie Weglänge } \lambda}{\text{Wellenlänge } \lambda}$ .

Entsprechend schreibt man:

$$(8') \quad \begin{cases} s = s_1 + \varrho s_2 + \varrho^2 s_3 \dots \\ u = u_1 + \varrho u_2 + \dots \\ T = T_0 + T_1 + \varrho T_2 + \varrho^2 T_3 \dots \end{cases}$$

Der Operator  $\frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x}$  bedeutet Multiplikation mit

$$2\pi i V \lambda^{-1} \left( 1 - \frac{\xi}{V} \right),$$

wo  $V$  die Schallgeschwindigkeit ist;  $|\xi|$  ist von der Größenordnung von  $V$ , während der Operator  $[F.]$  von der Größenordnung  $|\xi| \lambda^{-1}$  ist. Man erhält daher die sukzessiven Approximationen

$$(9) \quad \begin{cases} [f_1 F_0] = F_0 \left( \frac{\partial s_1}{\partial t} + \xi \frac{\partial s_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_0}{\partial T} \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + \xi \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \xi \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \\ [f_n F_0] = F_0 \left( \frac{\partial s_n}{\partial t} + \xi \frac{\partial s_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_0}{\partial T} \left( \frac{\partial T_n}{\partial t} + \xi \frac{\partial T_n}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + \xi \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial t} + \xi \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}. \end{cases}$$

1) Beim Vorhandensein einer potentiellen Energie  $E_p$  ist der Term

$$- \frac{1}{m} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\partial E_p}{\partial x} = \xi F_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_p}{kT}$$

hinzuzufügen. Ist  $E_p$  zeitunabhängig, so kann man nach Brillouin eine neue Variable  $S = s + \frac{E_p}{kT}$  einführen, die in den folgenden Entwicklungen an Stelle von  $s$  tritt. In unserer Näherung kann man natürlich auch schreiben:

$$S = s e^{\frac{E_p}{kT}}.$$

2) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912, S. 277 ff.; A. C. Lunn, Bull. Am. Math. Soc. 19. S. 455. 1913.



Nach Hilbert<sup>1)</sup> ist die Bedingung für die Lösbarkeit dieser inhomogenen Integralgleichung für  $f_n$ , daß die rechte Seite normal ist zu allen Lösungen der „symmetrisierten“ homogenen Gleichung  $[f_n F_0] = 0$ , nämlich zu 1,  $\xi$ ,  $m/2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$  (es gibt noch zwei andere,  $\eta$  und  $\zeta$ , die aber im eindimensionalen Fall nichts Neues ergeben).

Es besteht keinerlei Schwierigkeit, die Bedingungen zu befriedigen, die aus (4), (5) und (6) folgen,

$$\int f d\Omega = \int \xi f d\Omega = \int \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f d\Omega = 0;$$

denn wenn  $f_n'$  die spezielle Lösung von (9) ist, die man gewählt hat, so bildet man

$$f_n = f_n' + \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp. \left( - \frac{m}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{kT} \right) \\ \left[ \frac{1}{kT} \int \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f_n' d\Omega - \frac{5}{2} \int f_n' d\Omega - \frac{m\xi}{kT} \int \xi f_n' d\Omega \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{m}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{kT} \left( \int \frac{m}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{kT} f_n' d\Omega - \int \frac{3}{2} f_n' d\Omega \right) \right].$$

Hier haben wir die Tatsache benutzt, daß man zu jeder Lösung der inhomogenen Gleichung eine lineare Kombination der (drei) Lösungen der homogenen Gleichung addieren kann.

Es müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt sein, die man erhält durch Multiplikation der rechten Seite von (9) nacheinander mit 1,  $\xi$ ,  $\frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$  und Integration über  $d\Omega$ :

$$(10) \quad \frac{\partial s_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0,$$

$$(10') \quad \frac{kT_0}{m} \frac{\partial s_n}{\partial x} + \frac{k}{m} \frac{\partial T_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int \xi f_{n-1}^* d\Omega + \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0,$$

$$(10'') \quad kT_0 \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \xi f_{n-1} d\Omega = - \frac{3}{2} k \frac{\partial T_n}{\partial t}.$$

Multipliziert man jede Gleichung mit  $\varrho^n$  und summiert über  $n$ , so ergibt (10) die Kontinuitätsgleichung, (10') die makroskopische Bewegungsgleichung und (10'') die Erhaltung der Gesamtenergie. Dieselben Gleichungen in anderer Form fand Lorentz durch die Überlegung, daß die Stöße weder die gesamte Zahl der Teilchen noch den Impuls oder die Energie ändern.

1) D. Hilbert, a. a. O.

Eliminiert man  $\frac{\partial s_n}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial T_n}{\partial t}$  aus (9) mit Hilfe von (10), (10'), (10''), so findet man

$$(11) \left\{ \begin{aligned} [f_n F] &= \left( \frac{k}{m} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial T} \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} - \left( F_0 + \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \frac{2}{3} T_0 \frac{\partial F_0}{\partial T} \right) \frac{\partial u_n}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \xi f_{n-1} + \frac{\partial F_0}{\partial x} \int \xi^2 f_{n-1} d\Omega \right. \\ &\left. - \frac{2}{3} \frac{\partial F_0}{k \partial T} \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f_{n-1} d\Omega \right\} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial T} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nun sind der Faktor von  $\frac{\partial T_n}{\partial x}$ , der Faktor von  $\frac{\partial u_n}{\partial x}$  und der Rest der rechten Seite von (11) jeder für sich orthogonal zu den Lösungen von  $[f_n F] = 0$ . Man kann daher schreiben

$$f_n = f^{(1)} \frac{\partial T_n}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial u_n}{\partial x} + f_{n-1}^{(3)},$$

wo  $f^{(1)}$  und  $f^{(2)}$  von  $n$  unabhängig und definiert sind durch

$$(12') \quad [f^{(1)} F_0] = \frac{k}{m} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial F_0}{\partial T},$$

$$(12'') \quad [f^{(2)} F_0] = -F_0 - \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} - \frac{2}{3} T_0 \frac{\partial F_0}{\partial T}.$$

$f^{(1)}$  und  $f^{(2)}$  sind Funktionen von  $\xi, \eta, \zeta, T_0$  allein;  $f^{(1)}$  ist eine ungerade,  $f^{(2)}$  eine gerade Funktion von  $\xi$ .

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  haben die Gl. (10), (10'), (10'') die folgende Form

$$(13) \quad \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

$$(13') \quad \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{k T_0}{m} \frac{\partial s_1}{\partial x} + \frac{k}{m} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0,$$

$$(14') \quad \frac{k T_0}{m} \frac{\partial s_2}{\partial x} + \frac{k}{m} \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0,$$

$$(15) \quad k T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{3}{2} k \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0,$$

$$(15') \quad k T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\kappa}{\varrho n_0} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{3}{2} k \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0,$$

wo  $D = n_0 m$  die Dichte,  $\nu$  der Reibungs- und  $\kappa$  der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient ist, definiert durch

$$(16) \quad \nu = -\varrho n_0 m \frac{3}{4} \int \xi^2 f^{(2)} d\Omega, \quad \kappa = -\varrho n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f^{(1)} d\Omega.$$

So weit rechnet Lorentz. Der nächste Schritt besteht darin, (11) für  $n = 2$  und (12) zu benutzen

$$\begin{aligned} [f_2^{(3)} F_0] &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \xi \left( f^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \int \xi \left( f^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3k} \frac{\partial F_0}{\partial T} \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \left( f^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) d\Omega \right\} \\ &\quad + f^{(1)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x \partial t} + f^{(2)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial u_1}{\partial t}$  und  $\frac{\partial T_1}{\partial t}$  werden mit Hilfe von (13) und (14) eliminiert. Das Resultat ist

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} [f_2^{(3)} \cdot F_0] &= \left\{ \xi f^{(1)} + \frac{2}{3k} \frac{\partial F_0}{\partial T} \frac{x}{\varrho D} - \frac{k}{m} f^{(2)} \right\} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{k T_0}{m_0} f^{(2)} \frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} \\ &\quad + \left\{ \xi f^{(2)} - \frac{2}{3} T_0 f^{(1)} - \frac{\nu}{\varrho D} \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \right.$$

Man kann nun schreiben

$$(17) \quad f_2^{(3)} = f_2^{(4)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + f_2^{(5)} \frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + f_2^{(6)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$(17') \quad [f_2^{(4)} \cdot F_0] = \xi f^{(1)} + \frac{2}{3} \frac{x}{\varrho D} \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{k}{m} f^{(2)} \quad \text{usw.}$$

$f_2^{(4)}, f_2^{(5)}, f_2^{(6)}$  sind Funktionen von  $\xi, \eta, \zeta, T_0$  allein,  $f^{(4)}$  und  $f^{(5)}$  sind gerade,  $f^{(6)}$  ist ungerade in  $\xi$ .

Man definiert dann drei neue Konstanten<sup>1)</sup>

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= -\varrho^2 n_0 m \int \xi^2 f_2^{(4)} d\Omega, \quad \sigma_2 = \varrho^2 n_0 m \int \xi^2 f_2^{(5)} d\Omega, \\ \sigma_3 &= \varrho^2 n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f_2^{(6)} d\Omega. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen dritter Ordnung werden

$$(13'') \quad \frac{\partial s_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0,$$

$$(14'') \quad \frac{k T_0}{m} \frac{\partial s_3}{\partial x} + \frac{k}{m} \frac{\partial T_3}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\nu}{\varrho D} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \frac{\sigma_1}{\varrho^2} \frac{\partial^3 T_1}{\partial x^3} - \frac{\sigma_2}{\varrho^2} \frac{\partial^3 s_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0,$$

$$k T_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{x M}{\varrho \cdot D} \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} - \frac{\sigma_3}{\varrho^2 n_0} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{3}{2} k \frac{\partial T_3}{\partial t} = 0.$$

Bildet man nun (13) +  $\varrho$  (13') +  $\varrho^2$  (13''); (14) +  $\varrho$  (14') +  $\varrho^2$  (14''); setzt  $\varrho T$  für  $\varrho(T_1 + \varrho T_2)$  und macht andere entsprechende Approxi-

1) Nach Jones (Fußnote 1 und 3, S. 466) erhält man für starre Moleküle

$$\sigma_1 = \frac{4 \nu^2}{D T_0} \left( 1,013 - 0,107 \frac{x M}{\nu R} \right), \quad \sigma_3 = 4,052 \frac{\nu^2}{D}.$$

mationen, so findet man für die Bewegungsgleichungen bis zur zweiten Ordnung<sup>1)</sup>:

$$(19) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$(19') \quad \frac{k T_0}{m} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{k}{m} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\nu}{D} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\sigma_1}{D} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{\sigma_2}{D} \frac{\partial s^3}{\partial x^3} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$(19'') \quad k T_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\kappa}{n_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\sigma_3}{n_0} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \frac{3}{2} k \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Benutzt man die Formel<sup>2)</sup>

$$s = S e^{2\pi i \omega t - i k x}, \quad u = U e^{2\pi i \omega t - i k x}, \quad T = \vartheta e^{2\pi i \omega t - i k x},$$

so findet man die folgende Gleichung

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{4\pi^2 \omega^2}{k^2} \left\{ 1 - \frac{R T_0}{M} \frac{k^2}{4\pi^2 \omega^2} - i \frac{4}{3} \frac{\nu}{D} \frac{k^2}{2\pi \omega} - \frac{\sigma_2 k^4}{4\pi^2 \omega^2} \right\} \\ & \cdot \left\{ 1 - i \frac{\kappa M}{\frac{3}{2} R D} \frac{k^2}{2\pi \omega} \right\} \\ & = \frac{2}{3} \frac{R T_0}{M} \left( 1 + \frac{\sigma_1 M}{R D} k^2 \right) \left( 1 + \frac{\sigma_3 M}{R T D} k^2 \right); \end{aligned} \right.$$

oder bei Vernachlässigung aller Terme niedrigerer Ordnung als der hier betrachteten ( $\kappa \sigma^2 k^3$ ,  $\sigma_1 \sigma_3 k^4$ ), und mit Benutzung der Abkürzung

$$(21) \quad V_0^2 = \frac{5}{3} \frac{R T_0}{M};$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{4\pi^2 \omega^2}{k^2} = V_0^2 + i 2\pi \omega \left\{ \frac{\kappa M}{\frac{3}{2} R D} \left( 1 - \frac{R T_0}{M} \frac{k^2}{4\pi^2 \omega^2} \right) + \frac{4\nu}{3D} \right\} \\ & + \left\{ \frac{4}{3} \frac{\nu \kappa M}{D^2 \frac{3}{2} R} + \frac{\sigma_2}{D} + \frac{2}{3} \left( \frac{\sigma_1}{D} T_0 + \frac{\sigma_3}{D} \right) \right\} k^2. \end{aligned} \right.$$

Der imaginäre Teil dieses Ausdruckes ist der gleiche, als wenn wir nur die erste Näherung berücksichtigt hätten. Die zweite Näherung beeinflusst also den Absorptionskoeffizienten nicht. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, daß diese Näherung in (19), (19'') nur

1)  $\frac{4}{3} \frac{\nu}{D} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \text{Zahlenfaktor} \cdot \lambda \cdot \frac{|\vec{k}|}{V} \cdot \frac{4\pi^2 \omega}{\text{Wellenlänge}} \cdot u$  verglichen mit  $\frac{\partial u}{\partial t} \sim u \frac{2\pi \omega}{V}$  ergibt das Verhältnis  $\frac{\text{freie Weglänge}}{\text{Wellenlänge}}$ , wie oben behauptet.

2) Im folgenden wird die Boltzmannsche Konstante  $k$  durch die Gaskonstante  $R$  ersetzt, und  $k$  wird in der Bedeutung benutzt, die aus den Gleichungen hervorgeht.

Terme ungerader Ordnung einführt, die bei Differentiation  $i$  in derselben Weise enthalten wie der Term  $\partial/\partial t$ . Schreibt man daher

$$k = 2\pi \left( \frac{\omega}{V_0} - i k_2 \right),$$

so erhält man für die Geschwindigkeit die Gleichung

$$(23) \left\{ V = V_0 \left\{ 1 + \frac{8\pi^2 \nu^2}{3 V_0^2} \omega^2 \left[ 1 + \frac{2\pi M}{3 R \nu} - \frac{1}{25} \left( \frac{\pi M}{R \nu} \right)^2 \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4\pi^2 \omega^2}{V_0^4} \left( \frac{1}{3} \frac{\sigma_1 T_0}{D} + \frac{\sigma_2}{2D} + \frac{1}{3} \frac{\sigma_3}{D} \right) \right\} \right\}.$$

Hier stimmt der erste Teil mit der Formel von Herzfeld und Rice überein, wenn man dort  $c = \frac{3}{2}$ ,  $\tau = 0$  setzt; dagegen sind die Terme mit  $\sigma$ , die die gleiche Größenordnung wie  $\nu^2$  haben, neu. Der Absorptionskoeffizient ist auch in dieser Näherung der gleiche wie a. a. O.

Um die nächsten Terme im Absorptionskoeffizienten zu erhalten, muß man bis zu einer weiteren Ordnung der Approximation gehen. Die Methode ist genau die gleiche wie vorher. Man findet

$$(24) \left\{ f_3 = f_3^{(1)} \frac{\partial T_2}{\partial x} + f_3^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial x} + f_2^{(2)} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + f_2^{(5)} \frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + f_2^{(6)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right. \\ \left. + f_3^{(4)} \frac{\partial^3 T_1}{\partial x^3} + f_3^{(5)} \frac{\partial^3 s_1}{\partial x^3} + f_3^{(6)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}, \right.$$

mit

$$(24') \quad [f_3^{(4)} \cdot F_0] = - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\sigma_1}{\varrho^2 D} + f_2^{(1)} \frac{2\pi M}{3 \varrho^2 D R} - f_2^{(6)} \frac{R}{M} + \xi f_2^{(4)},$$

$$(24'') \quad [f_3^{(5)} \cdot F_0] = \frac{\partial F_0}{\partial \xi} \frac{\sigma_2}{\varrho^3 D} - f_2^{(6)} \frac{R T_0}{M} + \xi f_2^{(5)},$$

$$(24''') \quad \left\{ [f_3^{(6)} \cdot F_0] = - \frac{2}{3R} \frac{\partial F_0}{\partial T} \frac{\sigma_3 M}{\varrho^2 D} \right. \\ \left. + f_2^{(2)} \frac{4}{3} \frac{\nu}{\varrho D} - \frac{2}{3} T_0 f_2^{(4)} - f_2^{(5)} + \xi f_2^{(6)}. \right.$$

$f_3^{(4)}, f_3^{(5)}$  sind ungerade,  $f_3^{(6)}$  ist gerade.

Die Kontinuitätsgleichung (19) bleibt unverändert.

Es ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen<sup>1)</sup>

$$(25) \left\{ \frac{R T_0}{M} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{R}{M} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\nu}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sigma_1}{D} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{\sigma_2}{D} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \right. \\ \left. - \frac{\sigma_3}{D} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \right.$$

1) Im Gleichgewicht,  $u = 0$ ,  $T = \text{const}$ , erhält man

$$\frac{R T_0}{M} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\sigma_2}{D} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} = 0,$$

was als einzige Lösung  $s = \text{const}$ , oder in Gegenwart eines äußeren Feldes

$S = \text{const}$ ,  $s = \text{const. exp.} \left( - \frac{E p}{k T} \right)$  zuläßt, wie es sein muß.

$$(25) \left\{ \begin{aligned} R T_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\kappa}{D} M \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\sigma_3 M}{D} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\sigma_5 M}{D} \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} \\ + \frac{\sigma_4}{D} M \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{3}{2} R \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \sigma_4 &= \varrho^3 n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f_3^{(4)} d\Omega, \\ \sigma_4 &= \dots \int \dots f_2^{(5)} d\Omega, \\ \sigma_6 &= -\varrho^3 n_0 m \int \xi^2 f_3^{(6)} d\Omega. \end{aligned} \right.$$

Die Abhängigkeit dieser neuen Konstanten vom Druck ist folgendermaßen

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \sim n_0 A^2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \sim n_0 A^3.$$

Die Verteilungsfunktion nimmt die endgültige Form an

$$\begin{aligned} F = (1+s)F_0 + \frac{\partial F_0}{\partial T} \Delta T - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} u + \varrho f^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho f^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \varrho^2 f_2^{(4)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ + \varrho^2 f_2^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial x^2} + \varrho^2 f_2^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + \varrho^3 f_3^{(4)} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \varrho^3 f_3^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \\ + \varrho^3 f_3^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

$f^{(2)}, f_2^{(4)}, f_2^{(5)}, f_3^{(6)}$  sind gerade, die anderen ungerade.

$\varrho$  tritt in den Endformeln nicht allein, sondern nur in der Kombination  $\varrho^n f_n$  auf.

Führt man (20) in (19), (25), (25') ein, so ergibt sich die folgende Gleichung für  $k$ :

$$\begin{aligned} \left( -\frac{R T_0}{M} \frac{i k^2}{2\pi\omega} + 2\pi i \omega + \frac{4}{3} \frac{\nu}{D} k^2 + \frac{\sigma_2}{D} \frac{i k^4}{2\pi\omega} - \frac{\sigma_5}{D} k^4 \right) \\ \cdot \left( \frac{3}{2} R 2\pi i \omega + \frac{\kappa}{D} M k^2 + \frac{\sigma_4}{D} M k^4 \right) \\ - \left( -R T i k + \frac{\sigma_3 M}{D} i k^3 + \frac{\sigma_5 M}{D} \frac{k^5}{2\pi\omega} \right) \left( -\frac{R}{M} i k + \frac{\sigma_1}{D} i k^3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir behalten nur Terme der Ordnung  $\varrho^3$  bei und finden

$$\begin{aligned} k^2 \left\{ 1 + 2\pi i \omega \frac{4\nu}{3D V_0^2} \left( 1 + \frac{\kappa M}{2\nu R} \right) \right\} = \frac{4\pi^2 \omega^3}{V_0^2} + i \frac{2}{5} \frac{\kappa M}{R D} \frac{k^4}{2\pi\omega} \\ + \left( \frac{2\sigma_3}{3D} + \frac{\sigma_2}{D V_0^2} - \frac{8}{9} \frac{\nu}{L} \frac{M\kappa}{R D} \right) \frac{k^4}{V_0^2} - i \frac{(2\pi\omega)^5}{V_0^6} \\ \cdot \left\{ \frac{\sigma_3}{D} \frac{\kappa M}{R D} \frac{2}{3 V_0^2} - \frac{\sigma_5}{D} + \frac{4}{5} \frac{\sigma_4 M}{R D} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_5}{D V_0^2} \right\}. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit wird durch die neuen Terme nicht verändert und ist daher noch immer durch (23) bestimmt. Der Absorptionskoeffizient  $2\pi k_2$ , definiert dadurch, daß die Amplitude sich wie  $e^{-2\pi k_2 x}$  ändert, ist

$$2\pi k_2 = \frac{2}{3} \frac{4\pi^2 \omega^2}{V_0^2} \frac{\nu}{D} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{5} + \frac{10}{9} \frac{4\pi^2 \omega^2}{V_0^4} \left( \frac{\nu}{D} \right)^2 \right. \\ \cdot \left[ 1 + \frac{7}{5} \gamma - \frac{7}{125} \gamma^2 - \frac{7}{625} \gamma^3 + \frac{3}{10} \left( 1 - \frac{2\gamma}{5} \right) \right. \\ \cdot \left( \frac{\sigma_1 T_0}{D} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_2}{D} + \frac{\sigma_3}{D} \right) \left( \frac{D}{\nu} \right)^2 - \frac{27}{40} \left( \frac{D}{\nu} \right)^3 \\ \cdot \left. \left( \frac{\sigma_4 V_0^2}{D} + \frac{4}{15} \frac{\sigma_4 T_0}{D} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_5}{D} + \frac{\sigma_2}{D} \frac{\pi M}{D R} \right) \right] \Bigg\},$$

wo  $\gamma$  eine Abkürzung ist für  $\frac{\pi M}{\nu R}$ .

Die neuen Korrektionsglieder sind vermutlich zu klein, um die experimentellen Resultate zu erklären.

Baltimore (Maryland), Rowland Physical Laboratory, Johns Hopkins University.

(Eingegangen 15. Juni 1935)

## **Untersuchungen über die kinetische Theorie der Gase**

### **II. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung und der Wärmeleitfähigkeit und ihre Anwendung auf Gleitung und Temperatursprung**

**Von K. F. Herzfeld**

#### **I. Einleitung**

Die übliche Methode, das Problem der Bewegung eines Gases usw. anzugreifen, besteht darin, eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen zu finden. Bei niedrigen Drucken aber tritt Gleitung auf, und entsprechend im Fall von Temperaturunterschieden das Phänomen von Temperatursprüngen und Radiometerkräften. Diese Effekte folgen nicht aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen, sondern werden direkt aus der kinetischen Theorie abgeleitet und liefern die Oberflächenbedingungen für die Differentialgleichungen. Diese Behandlung ist allerdings nicht ganz korrekt, da sie nicht zeigt, daß die Wirkung z. B. der Gleitung sich auch ins Innere erstreckt. Für den Fall der Radiometerkräfte existiert bisher keine vollauf befriedigende Behandlung<sup>1)</sup>. In der vorhergehenden Arbeit<sup>2)</sup> wurden die Bewegungsgleichungen in höherer Näherung als gewöhnlich (nämlich bis zur dritten Potenz der freien Weglänge  $\lambda$ ) entwickelt. Es ist zu erwarten, daß aus diesen neuen Gleichungen die oben aufgezählten Effekte abgeleitet werden können; denn Lorentz und Hilbert<sup>3)</sup> haben darauf hingewiesen, daß die Gleichungen ohne Wärmeleitung und Reibung nullter Ordnung, die mit Wärmeleitung und Reibung erster Ordnung in  $\lambda$  sind. Da z. B. die Gleitung eine Korrektur zur Reibung ist, proportional dem Verhältnis  $\lambda$ :Apparatdimensionen, so würde man erwarten, daß sie aus den Termen höherer Ordnung in  $\lambda$  in den Gleichungen hervorgeht.

Allerdings sind in der vorigen Arbeit die Gleichungen nur für makroskopische Bewegung in einer Richtung ( $x$ ) abgeleitet worden, und daher muß hier zunächst der allgemeine Fall untersucht werden.

---

1) Für Literatur vgl. K. F. Herzfeld u. H. M. Smallwood, in H. S. Taylors „A Treatise on Physical Chemistry“, 2. Aufl., New York 1931, Bd. 1.

2) K. F. Herzfeld, zitiert als I.

3) H. A. Lorentz u. D. Hilbert, vgl. Fußnote 6, S. 465 und 1, S. 465 der vorhergehenden Arbeit.



## II. Die Verteilungsfunktion und die Differentialgleichungen

Zunächst muß die Verteilungsfunktion mit den Methoden der ersten Arbeit abgeleitet werden. Das wird bis zu derselben Näherung in der kleinen Konstanten  $\varrho$  wie dort ( $\varrho^3$ ) geschehen. Einfachheitshalber nehmen wir vor der Hand an, daß alles nur von  $x$  und  $y$ , nicht aber von  $z$  abhängt. Das Resultat ist dann in der Bezeichnungsweise der vorigen Arbeit

$$(1) \left\{ \begin{aligned} F &= (1+s)F_0 + \frac{\partial F_0}{\partial T}(T-T_0) - \frac{\partial F_0}{\partial \xi} u - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v \\ &+ \varrho \left\{ f_1^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} + f_2^{(1)} \frac{\partial T}{\partial y} + f_{11}^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x} + f_{22}^{(2)} \frac{\partial v}{\partial y} + f_{12}^{(2)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \\ &+ \varrho^2 \left\{ f_{11}^{(4)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f_{12}^{(4)} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + f_{22}^{(4)} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right. \\ &+ f_{11}^{(5)} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + f_{12}^{(5)} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + f_{22}^{(5)} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \\ &+ f_{11}^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_{12}^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f_{22}^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_{11}^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_{12}^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &+ f_{22}^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left. \right\} + \varrho^3 \left\{ f_{111}^{(3)} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + f_{112}^{(3)} \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} + f_{122}^{(3)} \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} + f_{222}^{(3)} \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \right. \\ &+ f_{111}^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} + f_{112}^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial x^2 \partial y} + f_{122}^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial y^2} + f_{222}^{(5)} \frac{\partial^3 s}{\partial y^3} + f_{111}^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &+ f_{112}^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \\ &+ f_{122}^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + f_{222}^{(6)} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + f_{111}^{(7)} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + f_{112}^{(7)} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ &+ f_{122}^{(7)} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + f_{222}^{(7)} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Bezeichnungsweise der Koeffizienten  $f$  ist die folgende: die Indizes vor  $f$  beziehen sich auf die Differentiation, so daß  $112 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$  bedeutet. Der untere Index bezieht sich auf die Potenz von  $\varrho$ , die oberen Indizes 1 und 4 auf  $T$ , 5 auf  $s$ , 6 und 2 auf  $u$ , 7 auf  $v$ . ( $_{22}f^2$  und  $_{12}f^2$  sind Ausnahmen von der letzten Regel.)

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &_{11}f^2, \quad _{22}f^2, \quad _{11}f^4, \quad _{11}f^5, \quad _{22}f^4, \quad _{22}f^5, \quad _{111}f^6, \quad _{122}f^6, \quad _{112}f^7, \quad _{222}f^7 \\ &\quad \text{sind gerade in } \xi \text{ und } \eta. \\ &_{12}f^2, \quad _{12}f^4, \quad _{12}f^5, \quad _{112}f^6, \quad _{222}f^6, \quad _{122}f^7, \quad _{111}f^7 \\ &\quad \text{sind ungerade in sowohl } \xi \text{ als } \eta. \\ &_1f^1, \quad _{11}f^5, \quad _{22}f^6, \quad _{12}f^7, \quad _{111}f^4, \quad _{122}f^4, \quad _{111}f^5, \quad _{122}f^5 \\ &\quad \text{sind ungerade in } \xi, \text{ gerade in } \eta. \\ &_2f^1, \quad _{12}f^6, \quad _{22}f^7, \quad _{11}f^4, \quad _{112}f^4, \quad _{222}f^4, \quad _{112}f^5, \quad _{222}f^5 \\ &\quad \text{sind gerade in } \xi, \text{ ungerade in } \eta. \end{aligned} \right.$$

Wir benutzen nun nach Lorentz<sup>1)</sup> die Tatsache, daß  $f$  ein Skalar ist, der seine Form bei Drehung des Koordinatensystems beibehält<sup>2)</sup>.

Daher muß  ${}_1f^1 \frac{\partial}{\partial x} + {}_2f^1 \frac{\partial}{\partial y}$  ein Skalar, müssen  ${}_1f^1$  und  ${}_2f^1$  Komponenten eines Vektors sein. Die allgemeinste Form ist

$$\begin{aligned} {}_1f^1 &= \xi \varphi_1 + \eta \varphi_2, \\ {}_2f^1 &= -\xi \varphi_2 + \eta \varphi_1, \end{aligned}$$

wo  $\varphi_1, \varphi_2$  Funktionen der Geschwindigkeit  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  allein sind. Die Bedingungen (2) aber verlangen  $\varphi_2 = 0$ . Wir finden daher, da  ${}_1f^1$  identisch ist mit der Größe  $f^1$ , [I (12')] der vorhergehenden Arbeit

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho {}_1f^1 = \varrho f^1 = \xi F_1^1, \\ \varrho {}_2f^1 = \eta F_1^1, \end{cases}$$

wo  $F_1^1$  eine Funktion der Geschwindigkeit allein ist.

Entsprechend müssen die Ausdrücke

$${}_{11}f^2, {}_{12}f^2, {}_{22}f^2$$

in (1) Komponenten eines symmetrischen Tensors zweiten Ranges sein, also die Form haben

$$\begin{aligned} {}_{11}f^2 &= \xi^2 \varphi_1 + \varphi_2 + 2\xi \eta \varphi_3, \\ {}_{12}f^2 &= \xi \eta \varphi_1 + (\eta^2 - \xi^2) \varphi_3, \\ {}_{22}f^2 &= \eta^2 \varphi_1 + \varphi_2 - 2\xi \eta \varphi_3. \end{aligned}$$

Bedingungen (2) machen  $\varphi_3$  Null,  ${}_{11}f^2$  ist identisch mit  $f^2$  der vorigen Arbeit, definiert durch [I, 12''). Daher

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho {}_{11}f^2 = \varrho f^{(2)} = \xi^2 F_1^{(2)} + \Phi_1^{(2)}, \\ \varrho {}_{12}f^2 = \xi \eta F_1^{(2)}, \\ \varrho {}_{22}f^2 = \eta^2 F_1^{(2)} + \Phi_1^{(2)}, \end{cases}$$

wo  $F, \Phi$  wieder nur von der Geschwindigkeit abhängen.

Dieselbe Überlegung zeigt, daß

$$(5) \quad \begin{cases} \varrho^2 {}_{11}f_2^4 = \varrho^2 f_2^4 = \xi^2 F_2^4 + \Phi_2^4 \quad [\text{vgl. I, (17')}], \\ \varrho^2 {}_{12}f_2^4 = 2\xi \eta F_2^4, \\ \varrho^2 {}_{22}f_2^4 = \varrho \eta^2 F_2^4 + \Phi_2^4, \end{cases}$$

und dieselben Gleichungen gelten für den oberen Index 5 an Stelle von 4.

1) H. A. Lorentz u. D. Hilbert, a. a. O.

2) Ich bin Herrn Prof. F. D. Murnaghan vom mathematischen Institut dieser Universität für seine Hilfe zu Dank verpflichtet. M. Brillouin (Fußnote I, 7 S. 465) hat dieselbe Methode für die Terme dritter Ordnung benutzt.

Ferner haben wir

$$(6) \quad \varrho^2_{11} f_2^6 = \varrho^2 f_2^6 = \xi^3 F_2^6 + \xi \Phi_2^6 \quad [\text{vgl. I, (17)}].$$

Wir definieren  $\varphi_2^6$  durch

$$(6') \quad \varrho^2_{12} f_2^6 = 2\xi^2 \eta F_2^6 + \eta \varphi_2^6,$$

wo  $_{12}f_2^6$  aus

$$(7) \quad \varrho [_{12}f_2^6 F_0] = 2\xi^2 \eta F_1^2 - \frac{2}{3} T_0 \eta F_1' - \frac{\nu}{3D} \frac{\partial F_0}{\partial \eta}$$

zu bestimmen ist. Die anderen Komponenten von  $f_2^6, f_2^7$  sind dann

$$(6'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^2_{22} f_2^6 = \xi \{ (\xi^2 + \eta^2) F_2^6 + \Phi_2^6 + \varphi_2^6 \} - \xi^3 F_2^6, \\ \varrho^2_{11} f_2^7 = \eta \{ (\xi^2 + \eta^2) F_2^6 + \Phi_2^6 + \varphi_2^6 \} - \eta^3 F_2^6, \\ \varrho^2_{12} f_2^7 = 2\xi \eta^2 F_2^6 + \xi \varphi_2^6, \\ \varrho^2_{22} f_2^7 = \eta^3 F_2^6 + \eta \Phi_2^6. \end{array} \right.$$

Für die Koeffizienten der Differentialquotienten dritter Ordnung erhalten wir

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^3_{111} f_3^4 = \varrho^3 f_3^4 = \xi^3 F_3^4 + \xi \Phi_3^4 \quad [\text{vgl. I, (24')}], \\ \varrho^3_{112} f_3^4 = 3\xi^2 \eta F_3^4 + \eta \Phi_3^4, \\ \varrho^3_{122} f_3^4 = 3\xi \eta^2 F_3^4 + \xi \Phi_3^4, \\ \varrho^3_{222} f_3^4 = \eta^3 F_3^4 + \eta \Phi_3^4, \end{array} \right.$$

und genau entsprechende Gleichungen mit oberem Index 5 an Stelle von 4. [Für  $_{111}f_3^5 = f_3^5$  vgl. I, (24')].

Schließlich

$$\varrho^3_{111} f_3^6 = \varrho^3 f_3^6 = \xi^4 (F_3^6 - 2\varphi_3^6) + \xi^2 (\Phi_3^6 + \Phi_3^7) + (\xi^2 + \eta^2)^2 \varphi_3^6,$$

wo  $f_3^6$  durch I (24'') definiert ist,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^3_{112} f_3^6 = 3\xi^3 \eta F_3^6 + \xi \eta (2\Phi_3^6 + \Phi_3^7), \\ \varrho^3_{122} f_3^6 = 3\xi^2 \eta^2 F_3^6 + \eta^2 \Phi_3^6 + \xi^2 \Phi_3^7 + (\xi^2 + \eta^2)^2 \varphi_3^6, \\ \varrho^3_{222} f_3^6 = \xi \eta^3 F_3^6 + \xi \eta \Phi_3^7, \\ \varrho^3_{111} f_3^7 = \xi^3 \eta F_3^6 + \xi \eta \Phi_3^7, \\ \varrho^3_{112} f_3^7 = 3\xi^2 \eta^2 F_3^6 + \xi^2 \Phi_3^6 + \eta^2 \Phi_3^7 + (\xi^2 + \eta^2)^2 \varphi_3^6, \\ \varrho^3_{122} f_3^7 = 3\xi \eta^3 F_3^6 + \xi \eta (2\Phi_3^6 + \Phi_3^7), \\ \varrho^3_{222} f_3^7 = \eta^4 (F_3^6 - 2\varphi_3^6) + \eta^2 (\Phi_3^6 + \Phi_3^7) + (\xi^2 + \eta^2)^2 \varphi_3^6. \end{array} \right.$$

Um  $\Phi_3^6$  und  $\Phi_3^7$  zu trennen, muß noch eine Tensorkomponente außer  ${}_{111}f_3^6$ ,  $[I, (24'')]$  berechnet werden, z. B.

$$(9) \quad [{}_{111}f_3^7, F_0] = \xi_{11} f_2^7 + \frac{\nu}{D} {}_{12}f^2.$$

Während es bei den gewöhnlichen Berechnungen der Koeffizienten der Reibung und der Wärmeleitung nur notwendig ist, zwei Integralgleichungen zu lösen, so ist es in dieser Näherung notwendig acht für den eindimensionalen und zehn für den zwei- oder dreidimensionalen Fall zu lösen.

Die Differentialgleichungen können nun nach Lorentz geschrieben werden:

$$(10) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

als Kontinuitätsgleichung,

$$(11) \quad \frac{RT}{M} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{R}{M} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{D} \left( -\frac{\partial}{\partial x} p_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} p_{xy} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

als Bewegungsgleichung.

Hier sind  $p_{xx}$ ,  $p_{xy}$ , ... die Komponenten des Spannungstensors mit Ausnahme des hydrostatischen Druckes, dessen Gradient schon durch die beiden ersten Terme von (11) gegeben ist.

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{D} p_{xx} &= \int \xi^2 f d\Omega = \frac{\partial u}{\partial x} \int \xi^2 \varrho_{11} f^2 d\Omega + \frac{\partial v}{\partial y} \int \xi^2 \varrho_{22} f^2 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \int \xi^2 \varrho_{11}^2 f_2^4 d\Omega + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \int \xi^2 \varrho_{22}^2 f^2 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \int \xi^2 \varrho_{11}^2 f_2^5 d\Omega + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \int \xi^2 \varrho_{22}^2 f_2^5 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \int \xi^2 \varrho_{111} f_2^6 d\Omega + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \int \xi^2 \varrho_{122} f_3^6 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \int \xi^2 \varrho_{112}^3 f_3^7 d\Omega + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \int \xi^2 \varrho_{222}^3 f_3^7 d\Omega. \end{aligned} \right.$$

In I ist festgestellt worden, daß

$$\frac{m}{2} \int (\zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2) f d\omega = 0.$$

Wir erhalten daher nach Lorentz:

$$(13) \quad p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0,$$

und dies ergibt

$$(14) \quad \int \xi^2 \varrho_{11} f^2 d\Omega = -2 \int \xi^2 \varrho_{22} f^2 d\Omega = \frac{4}{3} \frac{\nu}{D},$$

$$(15) \quad \int \xi^2 \varrho_{11}^2 f_2^4 d\omega = -2 \int \xi^2 \varrho_{22}^2 f_2^4 d\Omega = -\frac{\sigma_1}{D}$$

und entsprechend für  $f_2^5$ ;

$$(16) \quad \int \xi^2 \varrho^3 {}_{111}f_2^6 d\Omega = -2 \int \xi^2 {}_{222}f_2^6 d\Omega = -\frac{\sigma_6}{D}.$$

Entsprechend findet man

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{D} p_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \int \xi \eta \varrho {}_{12}f_2^2 d\Omega + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \int \xi \eta \varrho^2 {}_{12}f_2^4 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \int \xi \eta \varrho^2 {}_{12}f_2^5 d\Omega + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \int \xi \eta \varrho^3 {}_{112}f_2^6 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \int \xi \eta \varrho^3 {}_{222}f_2^6 d\Omega + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \int \xi \eta \varrho^3 {}_{112}f_2^7 d\Omega \\ &+ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \int \xi \eta \varrho^3 {}_{111}f_2^7 d\Omega. \end{aligned} \right.$$

Die Bedingung, daß

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial x} p_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} p_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} p_{xz}$$

die  $x$ -Komponente eines Vektors ist, führt zu den Gleichungen

$$(19) \quad \int \xi \eta \varrho {}_{12}f_2^2 d\Omega = \frac{v}{3D},$$

$$(20) \quad \int \xi^2 \varrho^2 {}_{11}f_2^4 d\Omega = \int (\xi^2 \varrho^2 {}_{22}f_2^4 + 2 \xi \eta \varrho^2 {}_{12}f_2^4) d\Omega = -\frac{\sigma_4}{D},$$

$$(20') \quad \int \xi^2 \varrho^2 {}_{11}f_2^5 d\Omega = \int \xi \varrho^2 (\xi {}_{22}f_2^5 + 2 \eta {}_{12}f_2^5) d\Omega = -\frac{\sigma_5}{D}.$$

Wir bezeichnen nun die Geschwindigkeit  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  mit  $r$  und benutzen die Abkürzung

$$(21) \quad 2\pi \int_0^\infty r^q F_n^a r^2 dr = (r^q F_n^a).$$

(14) verlangt nun<sup>1)</sup>

$$(22) \quad (r^4 F_1^2) = -3 (r^2 \Phi_1^2) = -5 \frac{v}{D},$$

was automatisch der Bedingung (19) genügt.

(15) ergibt:

$$(23) \quad (r^4 F_2^4) = -3 (r^2 \Phi_2^4) = -\frac{45}{8} \frac{\sigma_1}{D},$$

$$(23') \quad (r^4 F_2^5) = -3 (r^2 \Phi_2^5) = -\frac{45}{8} \frac{\sigma_2}{D},$$

womit (20) und (20') erfüllt sind.

1) Nach J. E. Jones (Fußnote I, 1 S. 466) ist  $(r^3 F_1^2) = -3 \Phi_1^2$ , was mehr ist, als (22) verlangt.

Entsprechend führt die Bedingung, daß (18) ein Vektor ist, zu

$$(24) \quad \int \xi^2 ({}_{112}f_3^i - {}_{222}f_3^i) d\Omega = \int \xi \eta ({}_{122}f_3^i - {}_{111}f_3^i) d\Omega$$

(und mehrere andere Gleichungen, die nicht Neues geben), woraus folgt  $(r^6 \varphi_3^6) = 0$ , während aus (16) sich ergibt:

$$(25) \quad (r^6 F_3^3) + (r^4 \Phi_3^6) + (r^4 \Psi_3^7) = 0,$$

$$(26) \quad \frac{\sigma_6}{D} = \frac{4}{35} (r^6 F_3^6).$$

Schreibt man:

$$(27) \quad \int \xi \eta \varphi^3 {}_{222}f_3^6 d\Omega = + \frac{\sigma_6'}{D},$$

$$(27') \quad + \frac{\sigma_6'}{D} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_6}{D} + \frac{2}{15} (r^4 \Psi_3^7),$$

so nimmt die  $x$ -Komponente der Bewegungsgleichung die Form an<sup>1)</sup>

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ & \frac{R T_0}{M} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{R}{M} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\nu}{D} \Delta u - \frac{1}{3} \frac{\nu}{D} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\sigma_1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \Delta T - \frac{\sigma_3}{D} \frac{\partial}{\partial x} \Delta s + \frac{\sigma_6'}{D} \Delta \Delta u - \frac{\sigma_6 + \sigma_6'}{D} \frac{\partial}{\partial x} \\ & \cdot \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Dies enthält eine Konstante ( $\sigma_6'$ ) mehr als die eindimensionale Gleichung. Ferner nimmt die Energiegleichung die Form an

$$(29) \quad R T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{M}{D} \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) + \frac{3}{2} R \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Hier sind  $S_x, S_y \dots$  die Komponenten des Energiestroms ohne den Konvektionsstrom und sind bestimmt durch

$$(30) \quad S_x = -n_0 k T_0 u + n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f d\Omega.$$

Da  $\text{div } S$  ein Skalar sein muß, findet man

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^2 {}_{11}f_2^6 d\Omega \\ & = n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^2 ({}_{22}f_2^6 + {}_{12}f_2^7) d\Omega = -\sigma_3, \end{aligned} \right.$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^3 f_3^4 d\Omega \\ & = n_0 \int \xi \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \varphi^3 {}_{122}f_3^4 d\Omega = \sigma_4, \end{aligned} \right.$$

und eine entsprechende Gleichung mit dem Index 5.

1) Wie in I bemerkt, sind ähnliche Gleichungen bis zur dritten Ordnung schon von M. Brillouin angegeben worden.

Die Energiegleichung wird schließlich

$$(33) \left\{ \begin{aligned} R T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\kappa M}{D} \Delta T - \frac{\sigma_3 M}{D} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \dots \right) \\ + \frac{\sigma_1 M}{D} \Delta \Delta T + \frac{\sigma_2 M}{D} \Delta \Delta s + \frac{3}{2} R \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nach den vorhergehenden Entwicklungen scheint es möglich, die höheren Approximationen der Gleichungen für die Bewegung und Wärmeleitung zu erraten. (10), die Kontinuitätsgleichung, ist exakt.

Die genaue Bewegungsgleichung sollte die Form haben ( $\vec{v}$  ist die vektorielle Geschwindigkeit)

$$(34) \left\{ \begin{aligned} \frac{R T_0}{M} \text{grad } s + \frac{R}{M} \text{grad } T - \frac{\nu}{D} \Delta \vec{v} - \frac{1}{3} \frac{\nu}{D} \text{grad div } \vec{v} \\ - \frac{\sigma_1}{D} \text{grad } \Delta T - \frac{\sigma_2}{D} \text{grad } \Delta s + \frac{\sigma'_0}{D} \Delta^2 \vec{v} \\ - \frac{\sigma_0 + \sigma'_0}{D} \text{grad } \Delta \text{div } \vec{v} \\ + \sum_{n=2} (\tau_n^{(4)} \text{grad } \Delta^n T + \tau_n^{(5)} \text{grad } \Delta^n s) \\ + \sum_{n=3} \tau_n^{(6)} \Delta^n \vec{v} + \sum_2 \tau_n^{(7)} \text{grad } \Delta^n \text{div } \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die genaue Gleichung der Wärmeleitung sollte sein

$$(35) \left\{ \begin{aligned} R T_0 \text{div } \vec{v} - \frac{\kappa M}{D} \Delta T - \frac{\sigma_3 M}{D} \Delta (\text{div } \vec{v}) + \sum_{n=2} \tau_n^{(8)} \Delta^n \text{div } \vec{v} \\ + \frac{\sigma_4 M}{D} \Delta^2 T \\ + \frac{\sigma_5 M}{D} \Delta^2 s + \sum_{n=3} (\tau_n^{(9)} \Delta^n T + \tau_n^{(10)} \Delta^n s) \\ + \frac{3}{2} R \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet  $\Delta^n$   $n$ -fache Anwendung des Laplaceschen Operators die  $\tau$  sind Konstanten,  $\tau^{(4)}$ ,  $\tau^{(5)}$ ,  $\tau^{(8)}$ , sind

$$\text{proportional } \frac{1}{D} \varrho^{2n},$$

$$\tau^{(6)}, \tau^{(9)}, \tau^{(10)} \text{ proportional } \frac{1}{D} \varrho^{2n-1}, \tau^{(7)} \text{ proportional } \frac{1}{D} \varrho^{2n+1}.$$

### III. Die Randbedingungen

Hilbert<sup>1)</sup> hat die Randbedingungen diskutiert, wenn die Geschwindigkeiten usw. an der Grenze vorgegeben sind. Was aber

1) D. Hilbert, a. a. O.

tatsächlich geschieht, ist, daß das Reflexionsgesetz der Moleküle am Rande vorgeschrieben wird. Wenn wir die  $yz$ -Ebene als Begrenzung wählen, so daß die positive  $x$ -Richtung in das Gas zeigt, so sagt das Reflexionsgesetz etwas aus über  $f$  für positive  $\xi$ . Wir müssen dann die makroskopischen Größen,  $T - T_0$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x} \dots$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \dots$ ,  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots$  für  $x = 0$  so bestimmen, daß  $f$  für  $\xi > 0$  mit diesem Resultat aus dem Reflexionsgesetz übereinstimmt. Wenn man die Approximationsmethode unendlich weit treiben würde, so hätte man unendlich viele Konstanten zur Verfügung und könnte die Übereinstimmung beliebig genau machen.

Mit einem Ausdruck wie (1) dagegen kann man nur versuchen,  $f$  für  $x = 0$  so genau wie möglich anzupassen. Dies ist eine Ausdehnung einer Methode von Epstein<sup>1)</sup>.

Spiegelreflexion würde bedeuten, daß  $f(-\xi) = f(\xi)$  am Rande ist. Diese Bedingung kann erfüllt werden dadurch, daß man am Rand alle makroskopischen Größen, deren Koeffizienten in (1) ungerade in  $\xi$  sind, (z. B.  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ) Null setzt. Alle anderen, z. B.  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , bleiben absolut frei. In der Tat läßt vollkommene Spiegelreflexion, die z. B. im Fall innerer Reibung mit vollkommener Gleitung identisch ist, das Problem unbestimmt.

Vollkommene Streuung, d. h. Reflexion so, daß die Moleküle, die von der Wand kommen, so verteilt sind, als ob auf der anderen Seite ein Gas der Temperatur  $T'$ , Dichte  $1 + s'$  und Geschwindigkeit parallel zur Wand  $v'$  vorhanden wäre, ergibt

$$(36) \quad F = (1 + s')F_0 + \frac{\partial F_0}{\partial T}(T' - T_0) - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v' \quad \text{für } \xi > 0, x = 0.$$

Mit der endlichen Entwicklung (1) kann diese Gleichung nicht für alle Werte der Variablen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  befriedigt werden. Eine Approximationsmethode für die beste Wahl der makroskopischen Variablen wird unten gegeben.

Nimmt man nun an, daß  $(1 - \alpha)$  der auf die Wand auftreffenden Moleküle spiegelnd,  $\alpha$  diffus (im obigen Sinne) reflektiert werde, so wird

$$(37) \quad \begin{cases} F(\xi > 0) = (1 - \alpha)F(\xi < 0) \\ \quad + \alpha \left\{ (1 + s')F_0(\xi > 0) + (T' - T_0)\frac{\partial F_0}{\partial T}(\xi > 0) \right\}. \end{cases}$$

1) P. Epstein, Phys. Rev. **23**. S. 710. 1924.



Bezeichnet man mit  ${}^gF$  die in  $\xi$  geraden, mit  ${}^uF$  die in  $\xi$  ungeraden Terme, die in (1) auftreten, so wird

$$(38) \quad \begin{cases} {}^gF + \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right) {}^uF = (1+s')F_0 \\ + (T' - T_0) \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v' \text{ für } \xi > 0, x = 0. \end{cases}$$

Ferner ist natürlich  $u = 0$ .

Diese letztere Bedingung kann man benutzen, um  $s'$  zu eliminieren, indem man schreibt

$$(39) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^0 \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta d\zeta F = \int_0^{\infty} \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta d\zeta \\ \cdot \left\{ (1-\alpha)F + \alpha(1+s')F_0 + \alpha(T' - T_0) \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v' \right\}. \end{cases}$$

Wir kürzen  $\frac{1}{W_0} \int_0^{\infty} \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f d\eta d\zeta$  durch  $(\xi f)$  ab, wo  $W_0$  die mittlere Geschwindigkeit senkrecht zur Wand

$$W_0 = \left( \frac{RT_0}{2\pi M} \right)^{1/2}$$

ist. Dann ist

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( s - s' + \frac{T - T'}{2T_0} \right) + \varrho \left[ \frac{\partial u}{\partial x} (\xi_{11} f_2^2) + \frac{\partial v}{\partial y} (\xi_{22} f_2^2) \right] \\ & + \varrho^2 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (\xi_{11} f_2^4) \right. \\ & + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} (\xi_{22} f_2^4) + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} (\xi_{11} f_2^5) + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} (\xi_{22} f_2^5) \Big] \\ & + \varrho^3 \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\xi_{111} f_3^6) \right. \\ & + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (\xi_{122} f_3^6) + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} (\xi_{122} f_3^7) \\ & \left. \left. + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} (\xi_{222} f_3^7) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Hier ist die Tatsache benutzt worden, daß Terme, die in  $\xi$  ungerade sind, innerhalb des Gases zu  $u$  nichts beitragen (außer  $\frac{\partial F_0}{\partial \xi}$ ), woraus

folgt, daß dies auch für  $\int_0^{\infty}$  und  $\int_{-\infty}^0$  einzeln gilt.

Wir führen nun die Größe<sup>1)</sup>  $\Delta f$ , die Differenz zwischen der rechten und linken Seite von (38) ein, und eliminieren  $(s - s')$  mit Hilfe von (40). Dann findet man für  $\xi > 0$ :

1)  $\Delta$  ist hier nicht der Laplacesche Operator, sondern Symbol für eine Differenz.

$$\begin{aligned}
 \Delta f = & (T - T') \left( \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{F_0}{2T} \right) - \frac{\partial F}{\partial \eta} (v - v') + \varrho \left\{ \frac{2-\alpha}{\alpha} f^1 \frac{\partial T}{\partial x} \right. \\
 & + 2 f^1 \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left[ {}_{11}f^2 - (\xi_{11} f^2) + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{12}f^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\
 & + \frac{\partial v}{\partial y} \left[ {}_{22}f^2 - (\xi_{22} f^2) \right] + \varrho^2 \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \left[ {}_{11}f_2^{(4)} - (\xi_{11} f_2^{(4)}) \right] \right. \\
 & + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{12}f_2^{(4)} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \left[ {}_{22}f_2^{(4)} - (\xi_{22} f_2^{(4)}) \right] \\
 & + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \left[ {}_{11}f_2^{(5)} - (\xi_{11} f_2^{(5)}) \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{12}f_2^{(5)} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \\
 & \cdot \left[ {}_{22}f_2^{(5)} - (\xi_{22} f_2^{(5)}) \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{11}f_2^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + {}_{12}f_2^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 & + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{22}f_2^{(6)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + {}_{11}f_2^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{12}f_2^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + {}_{22}f_2^{(7)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left. \right\} \Bigg\} \\
 & + \varrho^3 \left\{ \left[ \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{111}f_3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + {}_{112}f_3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{122}f_3 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial y^2} \right. \right. \\
 & + {}_{222}f_3 \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{111}f_3 \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} + {}_{112}f_3 \frac{\partial^3 s}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{122}f_3 \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial y^2} \\
 & + {}_{222}f_3 \frac{\partial^3 s}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \left[ {}_{111}f_3 - (\xi_{111} f_3) \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{112}f_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \left[ {}_{122}f_3 - (\xi_{122} f_3) \right] + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{222}f_3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\
 & + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{111}f_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \left[ {}_{112}f_3 - (\xi_{112} f_3) \right] \\
 & + \frac{2-\alpha}{\alpha} {}_{122}f_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \left[ {}_{222}f_3 - (\xi_{222} f_3) \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Da wir  $\Delta f$  nicht genau Null machen können, setzen wir statt dessen

$$\delta \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta \int d\zeta (\Delta f)^2 = 0.
 \tag{42}$$

Diese Gleichung hat die folgende Bedeutung: Nach Integration der Differentialgleichungen (10), (28), (33) führt man die Größen  $u, v, T, s$  in (41), (42) ein und bestimmt die Integrationskonstanten so, daß (42) ein Minimum wird. Ein Beispiel wird die Methode erläutern.

#### IV. Innere Reibung

Wir haben zwei unendliche Platten an den Stellen  $x = \pm l$ . Die obere bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v'$ , die untere mit  $-v'$ .

$$-\frac{\nu}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sigma_6'}{D} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0
 \tag{43}$$

oder

$$-\nu v + \sigma_6' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A' + B' x
 \tag{44}$$

oder

$$v = A + Bx + C'e^{-\gamma x} + C''e^{\gamma x} \text{ mit } \gamma^2 = \frac{\nu}{\sigma_6'}.
 \tag{45}$$

Die Symmetrie in bezug auf  $x = 0$  verlangt  $C' = -C''$ ,  $A = 0$ ; daher haben wir nur zwei Konstanten.

Führt man zur Abkürzung die hyperbolischen Funktionen ein

$$\operatorname{sh}(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}; \quad \operatorname{ch}(\gamma x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}; \quad \operatorname{th}(\gamma x) = \frac{\operatorname{sh}(\gamma x)}{\operatorname{ch}(\gamma x)},$$

so kann man schreiben

$$(46) \quad v = Bx + cv' \frac{\operatorname{sh}(\gamma x)}{\operatorname{sh}(\gamma l)}.$$

(43) ist dasselbe wie  $\frac{\partial}{\partial x} p_{xy} = 0$  und drückt die Tatsache aus, daß der Impuls von einer Platte auf die andere übertragen wird. Man hat

$$(47) \quad p_{xy} = -\nu \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_6' \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -\nu B,$$

mit Benutzung von (46).

$1/\gamma$  ist eine Länge von der Größenordnung der freien Weglänge.  $\Delta f$  hat dann die Form (für  $x = -l$ , Platte  $-v$ ):

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta f &= -\frac{\partial F}{\partial \eta} (v + v') + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho^2 f_{11} f_2^7 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ &\quad + \varrho^3 \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{11} f_2^7 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ &= +\frac{\partial F}{\partial \eta} l \left( B - \frac{v'}{l} + \frac{v'c}{l} \right) + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 (B + v'c\gamma \operatorname{ctgh} \gamma l) \\ &\quad - \varrho^2 f_{11} f_2^7 v'c\gamma^2 + \varrho^3 \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{11} f_3^7 v'c\gamma^3 \operatorname{ctgh} \gamma l \\ &= \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \frac{v'}{l} + \frac{v'}{l} B' \left( l \frac{\partial F}{\partial \eta} + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \right) \\ &\quad + \frac{v'}{l} c l \left( +\frac{\partial F}{\partial \eta} + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \gamma \operatorname{ctgh} \gamma l - \varrho^2 f_{11} f_2^7 \gamma^2 \right. \\ &\quad \left. + \varrho^3 \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{11} f_3^7 \gamma^3 \operatorname{ctgh} \gamma l \right), \end{aligned} \right.$$

mit der Abkürzung  $\frac{v'}{l} B' = B - \frac{v'}{l}$ . Hier und im folgenden ist der Index 0 an  $F$  weggelassen.

Schreibt man

$$+l \frac{\partial F}{\partial \eta} + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 f^2 = \psi,$$

so wird

$$\begin{aligned} &+l \frac{\partial F}{\partial \eta} + \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \gamma l \operatorname{ctgh} \gamma l - \varrho^2 \gamma^2 l f_{11} f_2^7 \\ &+ \varrho^3 \gamma^3 l \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{11} f_3^7 \operatorname{ctgh} \gamma l = \psi + \varrho \gamma l \left\{ \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{12}^2 \left( 1 - \frac{1}{\gamma l} \operatorname{ctgh} \gamma l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varrho \gamma f_{11} f_2^7 + \varrho^2 \gamma^2 \frac{2-\alpha}{\alpha} f_{11} f_3^7 \operatorname{ctgh} \gamma l \right) \right\} = \psi + \varrho \gamma l \chi; \\ &\frac{\gamma l}{\gamma l - 1} \left( -f_{11} f_2^7 \operatorname{tgh} \gamma l + \frac{2-\alpha}{\alpha} \varrho \gamma f_{11} f_3^7 \right) = \chi'. \end{aligned}$$

Dann ergibt (42), wenn man die Integrationsgrenzen fortläßt, bei Variation nach  $B'$  und  $c$

$$(47) \quad \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} \int_{12} f^2 \psi d\Omega + B' \int \psi^2 d\Omega + c \int (\psi^2 + \psi \varrho \gamma l \chi) d\Omega = 0,$$

$$(47') \quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} \int_{12} f^2 (\psi + \varrho \gamma l \chi) d\Omega + B' \int \psi (\psi + \varrho \gamma l \chi) d\Omega \\ &\quad + c \int (\psi + \varrho \gamma l \chi)^2 d\Omega = 0, \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man (47) von (47') subtrahiert

$$(47'') \quad \varrho \frac{2-\alpha}{\alpha} \int_{12} f^2 \chi d\Omega + B' \int \psi \chi d\Omega + c \int (\psi \chi + \varrho \gamma l \chi)^2 d\Omega = 0.$$

Elimination von  $c$  aus (47) und (47'') führt zu

$$\begin{aligned} -B' &= \frac{1}{\gamma l} \frac{2-\alpha}{\alpha} \left\{ \int_{12} f^2 \psi d\Omega \cdot \int (\psi \chi + \varrho \gamma l \chi^2) d\Omega - \int_{12} f^2 \chi d\Omega \right. \\ &\quad \cdot \left. \int (\psi^2 + \varrho \gamma l \psi \chi) d\Omega \right\} \left\{ \int \psi^2 d\tau \int \chi^2 d\Omega - \left( \int \psi \chi d\Omega \right)^2 \right\}^{-1} \\ &= -\frac{\tanh \gamma l}{\gamma l - 1} - \frac{\varrho}{l} \left\{ \int \chi' \psi d\Omega \int (\psi \chi + \varrho \gamma l \chi^2) d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \int \chi' \chi d\Omega \int (\psi^2 + \varrho \gamma l \psi \chi) d\Omega \right\} \left\{ \int \psi^2 d\tau \int \chi^2 d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \left( \int \psi \chi d\Omega \right)^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar von der richtigen Größenordnung  $\frac{\varrho}{l}$  oder  $\frac{1}{\gamma l}$ ,  
freie Weglänge.

Während es erlaubt ist, den zweiten Term von  $\psi$  fortzulassen also zu schreiben

$$\int \psi^2 d\Omega = \frac{M}{8 R T \sqrt{2}},$$

sind die Terme von  $\chi$  alle von gleicher Größenordnung. Der Grund hierfür liegt in einer tieferen mathematischen Schwierigkeit, die ich nicht zu lösen imstande war.

Streng genommen darf im Prozeß sukzessiver Approximation  $f$  nicht geschrieben werden

$$f = F_0 - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v + \varrho_{11} f^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \varrho^2_{11} f^7_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varrho^3_{111} f^7_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3},$$

sondern

$$\begin{aligned}
 f &= F_0 - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} (v_1 + \varrho v_2 + \varrho^2 v_3 + \varrho^3 v_4) + \varrho_{11} f^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_1 + \varrho v_2 + \varrho^2 v_3) \\
 &\quad + \varrho^2_{11} f^2_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_1 + \varrho v_2 \dots) + \varrho^3_{111} f^7_3 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \\
 &= F_0 - \frac{\partial F_0}{\partial \eta} v_1 + \varrho \left( -\frac{\partial F_0}{\partial \eta} v_2 + {}_{11}f^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \varrho^2 \left( -\frac{\partial F_0}{\partial \eta} v_3 + {}_{11}f^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + {}_{11}f^7_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) \\
 &\quad + \varrho^3 \left( -\frac{\partial F_0}{\partial \eta} v_4 + {}_{11}f^2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + {}_{11}f^7_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + {}_{111}f^7_3 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \right).
 \end{aligned}$$

Schreibt man nun

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} D \int_{-\infty}^{\infty} \xi \eta f d\Omega = -\varrho \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\
 &\quad - \varrho^2 \left( \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + 0 \cdot \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \right) - \varrho^3 \left( \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3} + 0 \cdot \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^4} + \frac{\sigma'_6}{\varrho^3} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} \right),
 \end{aligned}$$

so sollte der Koeffizient jeder Potenz von  $\varrho$  Null sein,

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\sigma'_6}{\nu \varrho^3} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 v_3}{\partial x^4} = 0,$$

$$(49) \quad \text{d. h. } v_n = a_n + b_n x \text{ für alle Näherungen.}$$

Die Differentialgleichung (43) erhält man, wenn man sagt: Wir behalten nur Terme mit  $\varrho^3$  bei, daher ist es gleichgültig, ob wir  $v$  oder  $v = v_1 + \varrho v_2 + \varrho^2 v_3 + \varrho^3 v_4$  schreiben. Die Schwierigkeit entspringt dem Umstand, daß für eine Lösung  $ce^{-\gamma x}$  die Größe  $\varrho v$  von gleicher Ordnung wie  $\varrho^2 \frac{\partial v}{\partial x}$  ist. Vom Standpunkt der Konsistenz der Approximationsmethode ist (49) vorzuziehen. Vom physikalischen Standpunkt aber vermute ich, daß (44) richtig ist.

Wenn aber

$$(48') \quad v = Bx$$

benutzt wird, so ist  $B'$  wieder durch

$$\delta \int \left[ -\frac{\partial F_0}{\partial \eta} (Bl - v') + \frac{2-\alpha}{\alpha} \varrho_{12} f^2 B \right] d\Omega = 0$$

bestimmt. Man setzt

$$B = \frac{v'}{l} + \varrho \frac{v'}{l^2} B' \frac{2-\alpha}{\alpha},$$

oder

$$0 = \delta \int \left[ \frac{\partial F_0}{\partial \eta} B' + {}_{12}f^2 \right] d\Omega,$$

oder

$$(50) \quad B' = \int {}_{12}f^2 \frac{\partial F_0}{\partial \eta} d\Omega \cdot \frac{8RT\sqrt{2}}{M}.$$

Benutzt man für  $\varrho_{12} f^2$  die Formel von Enskog<sup>1)</sup> für starre Kugeln (Durchmesser  $d$ ), nämlich

$$\varrho_{12} f^2 = - \frac{5\pi\sqrt{2}}{4d^2 n_0} F_0 \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} \xi \eta \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left( \frac{Mr^2}{2RT} \right)^n;$$

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so findet man

$$\varrho B' = - \frac{5\sqrt{2}}{16d^2 \pi n_0} \sum \gamma_n (n+2)! 2^{-n-2} = - \frac{5}{32} \frac{\sqrt{2}}{d^2 \pi n_0} (1 + \dots)$$

bei Vernachlässigung höherer  $\gamma$ ; oder

$$p_{xy} = \nu \frac{v'}{l} \left( 1 - \frac{5}{16} \frac{2-\alpha}{\alpha l} \frac{1}{d^2 \pi n_0} \right).$$

Zum Vergleich sei erwähnt, daß in der üblichen Näherung:

$$\text{freie Weglänge} = \frac{1}{d^2 \pi n_0 \sqrt{2}}.$$

#### V. Wärmeleitung

Wir nehmen an, daß sich eine unendliche Platte bei  $x = l$ , mit der Temperatur  $T'$  befinde, eine andere bei  $x = -l$  mit der Temperatur  $T_0 - (T' - T_0)$ .

Die Gl. (28) und (33) nehmen die Form an:

$$(51) \quad \begin{cases} -\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sigma_4 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \sigma_5 \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} = 0, \\ \frac{RT_0}{M} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{R}{M} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\sigma_1}{D} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \frac{\sigma_3}{D} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0, \end{cases}$$

und haben das folgende Integral:

$$(52) \quad s = - \frac{1}{T_0} \left( \frac{T' - T_0}{l} + A \right) x + a_1 B_1 \frac{\text{sh } \gamma_1 x}{\text{sh } \gamma_1 l} + a_2 B_2 \frac{\text{sh } \gamma_2 x}{\text{sh } \gamma_2 l},$$

$$(52') \quad T - T_0 = \left( \frac{T' - T_0}{l} + A \right) x + B_1 \frac{\text{sh } \gamma_1 x}{\text{sh } \gamma_1 l} + B_2 \frac{\text{sh } \gamma_2 x}{\text{sh } \gamma_2 l}.$$

Hier sind  $\gamma_1^2$  und  $\gamma_2^2$  die zwei Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$(53) \quad \begin{cases} \gamma^2 = \frac{1}{2} (T_0 \sigma_4 D + \kappa \sigma_1 - D \sigma_5) (\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_3 \sigma_5)^{-1} \\ \cdot [1 \pm [1 - 4\kappa D T_0 (\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_3 \sigma_5) (T_0 \sigma_4 D + \kappa \sigma_1 - \sigma_5 D)^{-2}]^{1/4}]. \end{cases}$$

$\gamma$  ist wieder von der Größenordnung  $1/\varrho$ .

1) D. Enskog, Phys. Ztschr. 12. S. 56. (1911). In dieser Formel ist ein Faktor  $\sqrt{2}$  hinzugefügt worden, um die Formel für  $\nu$  in Übereinstimmung mit einer späteren Arbeit im Ark. f. Astr. Fys. och Math. 16. S. 6. 1921 zu bringen.

Ferner ist  $a$  eine Abkürzung für:

$$a = \frac{1}{\sigma_5} \left( \frac{x}{\gamma^2} - \sigma_4 \right),$$

wo  $a$  den Index von  $\gamma$  hat. Der Wärmestrom ist  $-x \left( \frac{T' - T_0}{l} + A \right)$ .

Man findet für  $\Delta f$ :

$$\begin{aligned} \Delta f = & \frac{T' - T_0}{l} \varrho \frac{2 - \alpha}{\alpha} {}_1f^1 + A \left( \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{F_0}{2T_0} + \varrho \frac{2 - \alpha}{\alpha} {}_1f^1 \right) \\ & + B_1 \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{F_0}{2T} + \varrho {}_1f^1 \frac{2 - \alpha}{\alpha} \gamma_1 \operatorname{ctgh} \gamma_1 l \right. \\ & + \varrho^2 \gamma_1^2 [ {}_{11}f_2^4 - (\xi_{11} f_2^4) + a_{111} f_2^5 - a_1 (\xi_{11} f_2^5) ] \\ & + \varrho^3 \gamma_1^3 \frac{2 - \alpha}{\alpha} ( {}_{111}f_3^4 + a_{111} f_3^5 ) \operatorname{ctgh} \gamma_1 l \Big\} \\ & + B_2 \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{F_0}{2T} + \varrho \gamma_2 \frac{2 - \alpha}{\alpha} {}_1f^1 \operatorname{ctgh} \gamma_2 l + \varrho^2 \gamma_2^2 [ {}_{11}f_2^4 - (\xi_{11} f_2^4) \right. \\ & + a_{211} f_2^5 - a_2 (\xi_{11} f_2^5) ] + \varrho^3 \gamma_2^3 \frac{2 - \alpha}{\alpha} ( {}_{111}f_3^4 + a_{211} f_3^5 ) \operatorname{ctgh} \gamma_2 l \Big\}. \end{aligned}$$

Nun muß man diejenigen Werte von  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  benutzen, die erreichen, daß

$$\delta \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta \int d\zeta (\Delta f)^2 = 0.$$

Die resultierende Gleichung ist lang und von wenig Nutzen, solange die Funktionen  $f$  nicht ausgewertet sind.

Die im vorigen Kapitel erwähnte mathematische Schwierigkeit tritt auch hier auf. Eine systematische Benutzung der Theorie der sukzessiven Approximationen liefert für *alle* Näherungen:

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} = 0, \quad T_0 \frac{\partial s_n}{\partial x} + \frac{\partial T_n}{\partial x} = 0$$

oder

$$T - T_0 = \left( \frac{T' - T_0}{l} + A \right) x,$$

und die Minimumbedingung zur Bestimmung von  $A$  wird für  $x = -l$ :

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} A = & + \frac{T' - T_0}{l^2} \frac{2 - \alpha}{\alpha} \varrho \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta \int d\zeta {}_1f^1 \left( \frac{\partial F_0}{\partial T} - \frac{F_0}{2T_0} \right) \\ & \cdot \frac{64}{55} T_0^2 \left( \frac{2\pi RT}{M} \right)^{3/2} \sqrt{2}. \end{aligned} \right.$$

Benutzt man wieder Enskogs Werte<sup>1)</sup>:

$$\varrho {}_1f^1 = -F_0 \frac{1}{T_0} \frac{15}{8d^2 \sqrt{2}} \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2} \xi \sum_0^\infty \beta_n \left( \frac{Mr^2}{2RT} \right)^n,$$

1) Enskogs Formel, Phys. Ztschr. 3. a. O., ist durch 2 dividiert worden, damit sie das richtige Resultat für die Wärmeleitung liefert.

so findet man:

$$A = - \frac{T' - T_0}{l^2} \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{3}{11} \frac{1}{n_0 \pi d^3 \sqrt{2}} \sum_0^{\infty} \beta_n (n+1)! (n-2),$$

$$T - T_0 = \frac{T' - T_0}{l} \left( 1 - \frac{9}{44} \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{1}{l n_0 \pi d^3} \right).$$

#### Zusammenfassung

Die Untersuchungen der vorigen Arbeit werden auf drei Dimensionen ausgedehnt. Es ist möglich, die Form der Gleichungen der Bewegung und Wärmeleitung eines Gases in beliebig hoher Näherung zu erraten. Danach werden die Oberflächenbedingungen diskutiert und angedeutet, wie die Reflexionsbedingung für die Moleküle am Rand die makroskopischen Größen an der Oberfläche bestimmt. Dies wird dann angewendet auf die Berechnung von Gleitung und Temperatursprung. Eine mathematische Schwierigkeit tritt auf, die diskutiert, aber nicht gelöst wird. Die Frage ist, ob der lineare Geschwindigkeits- oder Temperaturgradient auch an der Wand vorhanden ist oder nicht. Die Formeln für den ersten Fall sind sehr kompliziert. Für den zweiten Fall erlauben Enskogs Formeln eine genauere Berechnung der Gleitung und des Temperatursprungs.

Baltimore (Maryland), Rowland Physical Laboratory, Johns Hopkins University.

(Eingegangen 15. Juni 1935)